GÉOMÉTRIE

tions arbitraires dépendant de certaines variables. Borel a précisé énormément ce résultat, dans le cas d'une seule équation, en montrant que l'intégrale générale peut s'exprimer comme une fonction déterminée d'une seule fonction arbitraire dépendant d'une seule variable.

On savait depuis longtemps que la nature analytique d'une fonction dépendant d'un paramètre peut dépendre considérablement de la nature arithmétique de ce paramètre. Tel est le cas de la fonction de z, z^a, dont la nature change selon que le paramètre, a, est entier, fractionnaire ou irrationnel. Mais la fonction z^a reste analytique.

Borel a étendu considérablement la portée de cette observation. Il a donné un exemple d'une équation aux dérivées partielles très simples:

$$\frac{\partial^2 \mathscr{C}}{\partial x^2} - \alpha^4 \frac{\partial^2 \mathscr{C}}{\partial y^2} = \psi(x, y)$$

où une intégrale périodique, généralement analytique, cesse de l'être pour certaines valeurs du paramètre α. On a ainsi un exemple d'une fonction continue de deux variables réelles dont toutes les dérivées sont continues, mais qui n'est analytique en aucun point (x, y). Cet exemple est d'autant plus frappant qu'il ne s'agit pas ici d'un cas pathologique mais d'un problème fort simple où toutes les données sont supposées analytiques.

Géométrie

Rappelons d'abord que la définition et l'étude des propriétés de la mesure et de la raréfaction par Borel, si elles sont d'une importance extrême en analyse, relèvent cependant de la géométrie.

De même, Borel a étudié l'équation adjointe dont il a été question plus haut (p. 75) par des méthodes géométriques. Il y a en particulier obtenu d'importantes propositions concernant les « plans générateurs » des quadriques dans les espaces à n dimensions (qui jouent le même rôle que les génératrices des quadriques classiques).

Mais le travail le plus important réalisé par Borel en géométrie est celui qui a fait l'objet d'une question mise au concours par l'Académie des Sciences et dont Borel a obtenu le prix correspondant.

Il s'agit de l'étude des déplacements à trajectoires sphériques. Avant Borel, des solutions particulières avaient été données. Sans avoir obtenu la solution la plus générale, Borel a pu établir une classification qui lui a permis, non seulement de retrouver les solutions connues, mais d'obtenir de nombreuses solutions nouvelles et de préparer des recherches complémentaires. Pour arriver à cette classification, Borel observe que la condition imposée aux déplacements envisagés se traduit par une équation de la forme:

$$\sum_{i=1}^{17} E_i \, T_i = 0$$

où chacun des 17 termes E_i est une « fonction de l'espace » et chacun des 17 termes T_i est une fonction du temps. Pour en obtenir la solution, on est ramené à un problème d'algèbre classique, qu'on résout en établissant k relations linéaires entre les E_i, d'où résultent $17 - k$ relations linéaires entre les T_i. La discussion montre qu'on arrive à une classification où les solutions correspondent aux différents modes d'intersection d'un certain nombre de quadriques.

Parmi les conséquences les plus frappantes, citons ces deux-ci:

I. Il existe un mouvement où tous les points d'une cubique plane rigide décrivent des courbes sphériques, huit points situés hors du plan de la cubique décrivant aussi des courbes sphériques.

II. Etant donnés deux triangles rigides non semblables situés dans deux plans parallèles, on peut relier leurs sommets par des barres rigides et déplacer l'un des triangles de sorte que son plan reste parallèle au plan de l'autre triangle. Dans ce mouvement un quatrième point fixe dans le premier plan, reste à une distance invariable d'un quatrième point fixe dans l'autre plan.