Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 11 (1965)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA VIE ET L'ŒUVRE D'ÉMILE BOREL
Autor: Fréchet, Maurice
Kapitel: travaux de Mathématiques appliquées
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39967

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Les travaux de Mathématiques appliquées

Nous avons expliqué plus haut, p. 17, que, si c'est après la première guerre mondiale que Borel s'est particulièrement occupé des mathématiques appliquées, il s'y était intéressé déjà auparavant en raison de leur connexion avec certains de ses travaux de mathématiques pures.

Parmi les mathématiques appliquées, Borel a consacré surtout son attention et ses recherches au calcul des probabilités et à la physique mathématique.

I. Calcul des probabilités

Là encore, Borel a été un initiateur en introduisant implicitement la conception de convergence presque certaine, liée à une généralisation remarquable du théorème de Bernoulli et en créant la théorie des jeux psychologiques.

Remarques. — L'idée a été émise que les idées les plus originales de Borel ont été publiées avant la première guerre et concernent toutes l'Analyse. Nous croyons que les deux sujets que nous venons de mentionner sont d'une originalité aussi grande et ont chacun donné lieu aussi à d'innombrables publications postérieures, par ses contemporains et successeurs.

En sortant du calcul des probabilités, les quatre définitions (non équivalentes) mentionnées plus haut, p. 58, de la raréfaction d'un ensemble de mesure nulle, étaient tout à fait inattendues et n'ont pourtant été développées par Borel qu'après la seconde guerre mondiale.

Probabilités dénombrables.

I. Avant Borel, on avait étudié, comme lui, le cas d'une infinité dénombrable d'épreuves. Mais on s'était limité aux propriétés asymptotiques d'une probabilité dépendant d'un nombre fini croissant d'épreuves. Avec Borel s'ouvre un domaine tout nouveau dans le calcul des probabilités: celui des probabilités « dénombrables ». Et Borel réussit à trouver les valeurs exactes

des probabilités d'événements dont la réalisation dépend d'une infinité d'épreuves.

Il commence par démontrer un théorème fondamental et assez inattendu [S., p. 163].

Soient $E_1, E_2, \ldots E_n \ldots$ une suite d'événements indépendants et $p_1, p_2, \ldots p_n, \ldots$ leurs probabilités respectives. La probabilité pour qu'une infinité de ces événements se réalisent est égale à 0 si la série Σp_n est convergente et 1 si elle est divergente.

En appelant A_k la probabilité pour que k des événements E_i se produisent, Borel a complété son théorème en montrant que si Σp_k est convergente, les A_k ne sont pas nulles (au contraire de A_∞); si Σp_k est divergente, les A_k sont nulles (alors que $A_\infty = 1$).

Enfin, dans un mémoire ultérieur, [S. p. 302], Borel a étendu son théorème au cas où les E_i ne sont pas indépendants, moyennant certaines restrictions sur le sens à attribuer aux cas de convergence et de divergence.

Dans le même mémoire, Borel réalise un progrès encore plus grand. Mais, suivant une caractéristique de son esprit que nous avons signalée plus haut, ce progrès est réalisé dans des cas particuliers et il laisse au lecteur ou à ses successeurs le soin d'en comprendre et d'en formuler la portée générale. Il s'agit, d'une part, d'un théorème apportant une précision nouvelle et très importante au théorème de Bernoulli et, d'autre part, de la conception d'une nouvelle sorte de convergence: la convergence presque certaine (dite aussi presque sûre).

Borel ne considère explicitement que le cas où l'on étudie la fréquence φ_n [1] d'un chiffre déterminé dans les n premiers chiffres d'un nombre N pris au hasard (en supposant que la probabilité de l'apparition d'un chiffre déterminé est indépendante de ce chiffre et par suite, égale à $\frac{1}{10}$). Quand n croît, la convergence de φ_n vers $\frac{1}{10}$ est un événement fortuit, Borel démontre que la probabilité de cet événement est égale à l'unité. Mais le raisonne-

---

1) La fréquence d'un événement dans n épreuves est le rapport $\frac{r_n}{n}$ où r_n est le nombre de répétitions de l'événement dans les n épreuves.

ment de Borel est général et permet d'énoncer explicitement le résultat suivant:

Soient f_n la fréquence de n épreuves indépendantes d'un événement E de probabilité constante p. Alors la probabilité que f_n tende vers p est égale à l'unité.

On voit immédiatement qu'on a là un énoncé à la fois plus frappant et plus précis que celui du théorème de Bernoulli. D'après ce dernier, il est très probable que $| f_n - p |$ soit petit quand n est grand, mais il n'en résulte pas que f_n tende vers p. Au contraire, si l'on admet le théorème de Borel, le théorème de Bernoulli en résulte, c'est-à-dire que si ε est un nombre positif arbitraire, la probabilité pour que $| f_n - p | < \varepsilon$ tend vers l'unité quand $n \to \infty$. Le théorème de Bernoulli est donc une simple conséquence d'un théorème plus général, celui de Borel et une conséquence moins simple à saisir — et pour cette raison, souvent mal interprétée — du théorème de Borel.

On n'a malheureusement pas encore pris l'habitude de considérer le théorème de Borel sous cet aspect. Avant Borel, le théorème de Bernoulli était un théorème fondamental. Après Borel, c'est le théorème de Borel qui doit lui être substitué.

La démonstration de Borel est analytique, mais il avait indiqué qu'on pourrait donner aussi une démonstration géométrique de son théorème. Cette démonstration géométrique a été explicitement obtenue, plus tard, par F. Hausdorff.

La démonstration analytique de Borel est assez compliquée. Une démonstration à la fois plus simple et d'une portée plus générale a été donnée plus tard par Cantelli. Mais on doit noter que la démonstration de Borel a l'avantage de se prêter mieux à une étude plus précise du comportement de la fréquence.

Nous avons aussi signalé plus haut une autre caractéristique du théorème de Borel: c'est qu'il introduit (encore une fois implicitement) une espèce nouvelle de convergence: « la convergence presque certaine ».

Généralisant la circonstance qui se présente dans le théorème de Borel, on est partout convenu maintenant de dire qu'un nombre aléatoire X_n converge presque certainement vers un nombre aléatoire X quand la convergence de $X_1, X_2, \ldots X_n \ldots$

vers X est un événement presque certain, c'est-à-dire dont la probabilité est égale à l'unité.

On peut dire que par la précision donnée au théorème de Bernoulli et par l'introduction de la convergence presque certaine, Borel s'est placé au premier rang des successeurs de Laplace et de Poincaré.

II. Poursuivant son étude des « probabilités dénombrables », Borel considère [S., p. 131] les lois de probabilité des quotients incomplets, A_n, de la fraction continue

$$X = \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{1}{A_2 + \dots}}$$

représentant un nombre incommensurable X compris entre 0 et 1 et dont la loi de probabilité est uniforme.

En appelant $\varphi(n)$ une fonction positive croissante de n, Borel trouve que:

I si la série $\Sigma \dfrac{1}{\varphi(n)}$ est convergente, la probabilité pour que l'on ait

$$A_n < \varphi(h)$$

à partir d'un certain rang est égale à un;

II si cette série est divergente, il y a une probabilité égale à un pour que l'on ait

$$A_n > \varphi(n)$$

à partir d'un certain rang.

En d'autres termes, il est infiniment probable que la croissance asymptotique de A_n est comprise entre celle de toute fonction $\varphi(n)$ telle que la série $\Sigma \dfrac{1}{\varphi(n)}$ soit convergente et celle de toute fonction $\varphi(n)$ telle que cette série soit divergente.

Dans le même mémoire, Borel exprime une opinion qu'il a souvent répétée, à savoir qu'une « probabilité nulle ou extrêmement petite doit être considérée comme équivalent à l'impossibilité ». C'est une opinion qui avait déjà été formulée, longtemps auparavant, par Buffon, puis par Cournot. Buffon et Borel ont

même chiffré, chacun de leur côté, ce qu'ils appellent «extrêmement petite». Borel en a donné une image concrète très frappante, le « miracle des singes dactylographes ». Peut-on concevoir que si un million de singes travaillaient dix heures par jour sur un million de machines à écrire et si leur production était successivement reliée en volumes, l'ensemble des volumes obtenus au bout d'un an se trouverait renfermer la copie exacte des livres de toute nature et de toutes les langues conservés dans les plus riches bibliothèques du monde? Il n'est douteux pour personne qu'un tel événement doit être considéré comme impossible, bien que sa probabilité si elle est extraordinairement petite, ne soit pas rigoureusement nulle.

Théorie des jeux stratégiques.

Sortant de la théorie pure pour aller vers les applications (du calcul des probabilités), Borel s'est encore ici montré un novateur dont les idées et les résultats ont donné lieu à un nombre énorme de travaux.

Jusqu'à lui — sauf dans des problèmes très particuliers dont aucune généralisation n'était entreprise — l'étude des jeux de hasard en calcul des probabilités s'était bornée aux cas où chacun des événements considérés avait une probabilité déterminée: jeu de pile ou face, jeu de dés, etc. L'intelligence, le caractère des joueurs n'y avaient aucune part. Il n'en est pourtant rien dans la plupart des jeux en usage: jeu de dames, jeu d'échecs, jeu de bridge, etc. ... On doit alors admirer avant tout que Borel ait eu l'audace de vouloir établir une théorie générale des jeux psychologiques et de concevoir la possibilité d'y parvenir en appliquant le calcul des probabilités à des hypothèses convenablement choisies. Il a choisi, à cet effet, des hypothèses plausibles, et a pu déterminer dans des cas particuliers les conséquences de ces hypothèses. Ce n'est pas tout; il a aperçu, dès sa première publication sur ce sujet, que le problème posé par lui avait des applications dans des domaines variés: économie politique, stratégie, psychologie, etc. ...

Pour éclairer ce qui précède, il nous faut, maintenant, préciser les hypothèses de Borel. Contrairement à certains esprits, nous ne pensons pas que ces hypothèses soient inéluctables et

d'ailleurs elles ont été discutées. Mais ce sont des hypothèses qui, d'une part, sont plausibles et qui, d'autre part, se prêtent à un traitement mathématique du problème, deux qualités qui sont très loin d'être toujours conciliables. L'un des principaux mérites de Borel est d'avoir montré qu'un tel choix d'hypothèses est possible, même si l'on n'admet pas qu'il soit nécessairement le seul ni le meilleur possible.

Les hypothèses de Borel.

A chaque coup à jouer, un joueur se trouve dans une circonstance déterminée dont certains éléments lui sont connus; par exemple, au jeu de cartes, l'ensemble des cartes qu'il a dans la main et la suite des coups précédents. Sur la base de ces données et sur l'hypothèse qu'il fait sur la psychologie des autres joueurs, il décide son coup. Borel élimine cette hypothèse [1] et considère l'ensemble des données et du choix du joueur. Il y a, dans la plupart des jeux, un nombre fini, quoique très grand, de tels ensembles. Au cours d'un jeu, un joueur adopte successivement un nombre fini de tels ensembles et caractérise ainsi sa « méthode de jeu ». Il y a un nombre fini de méthodes de jeu possibles: C_1, C_2, ... C_n et chaque joueur adopte nécessairement l'une d'elles à chaque coup. Mais il y a au début du jeu (par exemple, quand on distribue les cartes) ou au cours du jeu, une intervention du hasard. Si donc, en considérant le cas de deux joueurs, A et B, le joueur A adopte la méthode de jeu C_i et le joueur B la méthode C_k, c'est le calcul des probabilités qui permettra de calculer la probabilité π_{ik} pour que A gagne finalement. On a alors à chercher d'abord s'il existe une méthode de jeu C_i pour A, telle que π_{ik} soit positif quel que soit k (c'est-à-dire quelle que soit la méthode C_k adoptée par B). Alors A aurait intérêt à adopter la méthode C_i (ou l'une des méthodes C_i pour lesquelles π_{ik} est positif quel que soit k).

Borel se place dans le cas où une telle méthode de jeu n'existe pas et il se demande s'il n'est pas possible de jouer d'une manière avantageuse en variant son jeu. « Si l'on veut formuler une règle précise pour varier le jeu, cette règle ne faisant intervenir que

---

1) Voir page suivante, la citation où Borel énonce cette élimination, qui évidemment, éloigne un peu la théorie de la réalité.

les faits observés et non pas des remarques psychologiques sur le joueur auquel on est opposé, cette règle équivaut forcément à un énoncé tel que le suivant: la probabilité pour que, en un moment donné du jeu, A adopte, pour fixer sa conduite à ce moment, le code C_i est p_i; la probabilité analogue pour B pourra être désignée par q_k et, en désignant par n le nombre de codes qui subsistent, on a

$$\sum_{i=l}^{n} p_i = 1, \qquad \sum_{k=l}^{n} q_k = 1'' \tag{1}$$

La probabilité de gain de A est donc

$$P = \sum_{i=l}^{n} \sum_{k=l}^{n} \pi_{ik}\, p_i\, q_k \,.$$

Borel se place alors, pour simplifier, dans ce qu'il appelle le cas symétrique, caractérisé par l'égalité $\pi_{ii} = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire que si les deux joueurs adoptent la même méthode de jeu, leurs chances de gagner sont égales. Il observe que dans la plupart des jeux de cartes où l'un des joueurs joue le premier, ces deux chances ne sont pas égales, mais qu'elles le deviennent si le jeu consiste en deux parties où l'un des joueurs commencera le jeu dans la première et l'autre dans la seconde. Comme on a évidemment

$$\pi_{ik} + \pi_{ki} = 1$$

ou

$$\pi_{ik} = \frac{1}{2} + \alpha_{ik}\,, \quad \pi_{ki} = \frac{1}{2} + \alpha_{ki}$$

avec $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0$, on aura

$$P = \frac{1}{2} + \alpha\,,$$

avec $\alpha = \sum_{i=l}^{n} \sum_{k=l}^{i-l} \alpha_{jk} (p_i\, q_k - p_k\, q_i)$.

Tout ce qui précède figure dans la première Note de Borel.

Dans cette même Note, Borel prouve que, dans le cas où $n = 3$, « il est facile de trouver des nombres positifs p_1, p_2, p_3 vérifiant (1) et tels que α soit nul et donc $P = \frac{1}{2}$ quels que soient les nombres q_1, q_2, q_3. Il est donc possible d'adopter une manière de jouer permettant de lutter avec des chances égales contre tout joueur ».

Dans sa dernière Note sur les jeux, Borel procède autrement mais ramène au même problème mathématique. Au lieu de partir de la probabilité pour le joueur A de gagner, il part du gain moyen de A, soit g_{ik} quand A adopte le code C_i et B le code C_k. La symétrie du jeu entraîne

$$g_{ik} + g_{ki} = 0 .$$

Quand les codes C_i et C_k ne sont adoptés par A et B qu'avec les probabilités p_i et q_k, le gain moyen de A sera

$$G = \sum g_{ik}\, p_i\, q_k .$$

Par une méthode différente de la précédente, Borel montre alors que, pour $n = 3$ et $n = 5$, on peut trouver des probabilités q_k telles que G soit nul quels que soient les p_i.

Le problème de démontrer qu'il n'en est pas ainsi avait été d'abord prouvé insoluble pour $n = 3$ par Borel. Dans ses Notes successives, il lui avait paru d'abord soluble pour $n = 5$; puis ayant pu prouver qu'il était insoluble pour $n = 5$, il avait à ce moment pensé qu'il était soluble pour $n = 7$. Enfin, il termine sa dernière Note en écrivant que ce même problème « insoluble pour $n = 3$ et $n = 5$ me paraît également insoluble pour $n = 7$. Il serait intéressant, soit de démontrer qu'il est insoluble en général, soit d'en donner une solution particulière ».

Il est clair que l'évolution de sa pensée le conduit à croire que, quel que soit le nombre n des manières de jouer, on peut choisir les probabilités q_k pour B de choisir les codes C_k de sorte que, quelles que soient les probabilités p_i pour A de choisir les codes C_i, la moyenne du gain total de A et celle du gain total de B soient toutes deux nulles.

Toutefois, on doit constater que Borel n'a pas démontré qu'il en était ainsi quel que soit n et qu'il n'a même pas,

contrairement à son habitude, exposé en détail dans un mémoire, les Notes qui résumaient ses résultats dans les C.R.

On peut trouver l'explication de ces faits dans l'évolution de ses activités. Borel, pendant une certaine période, a, en effet, été pris de plus en plus par son activité politique (voir p. 12). D'abord maire de sa ville natale, puis conseiller général de son département, il a été élu député en 1924 et l'est resté jusqu'en 1936. Dans l'intervalle, il a même été quelques mois, ministre de la Marine et nous avons même eu l'honneur de le remplacer comme professeur et de le dispenser ainsi de faire ses cours à la Faculté des Sciences. De sorte qu'après avoir posé le problème et l'avoir résolu dans les cas les plus simples, Borel n'a plus eu le temps d'étudier en détail le problème mathématique qui restait à résoudre.

C'est après la dernière Note (de 1927) de Borel que von Neumann en 1928, adoptant exactement les mêmes hypothèses, a réussi à démontrer un théorème (dit du minimum — maximorum) équivalent au théorème de Borel, dans le cas général de n quelconque. Puis, associé avec l'économiste Morgenstern, il en a tiré une théorie économique générale.

La théorie de von Neumann-Morgenstern a eu un retentissement considérable, tandis que les Notes de Borel restaient ignorées. C'est pourquoi nous avons décidé de rappeler l'antériorité de Borel et nous avons publié dans « Econometrica » en 1953, une excellente traduction en anglais, réalisée par M. Savage des trois Notes les plus importantes de Borel, avec un commentaire. Nous avions auparavant communiqué ce commentaire à von Neumann dont la réponse a été publiée dans le même numéro d'Econometrica. Tout naturellement von Neumann a réagi vigoureusement, alléguant que rien ne pouvait être retenu de la théorie de Borel, avant sa propre démonstration du théorème général. D'après lui « en 1921 et ultérieurement Borel suppose que le théorème est ou risque d'être faux ». Mais si cette assertion est rigoureusement exacte, elle doit être complétée par la citation de Borel faite plus haut, montrant que Borel a fini par pencher vers l'exactitude générale du théorème.

Von Neumann ajoutait « j'avais moi-même élaboré mes idées sur le sujet avant d'avoir lu ses Notes (les Notes de Borel) ».

Mais en tout cas, il en avait lu une avant de publier son premier Mémoire (de 1928) où il cite lui-même cette Note de Borel.

Si notre publication dans *Econometrica* avait révélé à beaucoup l'antériorité de Borel, elle n'avait pas atteint tous les intéressés. C'est pourquoi, d'accord avec M. Guitton, rédacteur de la Revue d'Economie politique, nous avons publié, dans cette revue en 1959, à nouveau, mais cette fois en français, dans le texte original, les trois Notes de Borel et notre commentaire ainsi que la traduction du commentaire en anglais de von Neumann.

Dans les innombrables publications sur les jeux psychologiques et sur leurs applications à l'Econométrie, il ne sera plus admissible d'ignorer l'antériorité de Borel.

Malheureusement, tel n'est pas encore le cas. En 1959, dans une Notice, d'ailleurs très intéressante sur le grand mathématicien que fut von Neumann, l'auteur commence ainsi:

« Theory of games.

The essential ingredients of von Neumann's theory of games are already to be found in his 1928 paper . . .

The first application of game theory to an economic problem was given in a 1937 paper ».

Et sur ces deux sujets, le nom de Borel n'est même pas mentionné. Or:

1° le premier mémoire de von Neumann sur la théorie des jeux a été publié après la dernière Note de Borel sur le même sujet, et en connaissance de la théorie de Borel, qu'il cite. Les hypothèses à la base de la théorie de von Neumann sont en outre identiques à celles de Borel.

2° Borel, et non von Neumann, a été le premier à signaler que la théorie des jeux est applicable, non seulement à l'Economie politique, mais aussi à l'art militaire, à la psychologie, etc.

Ceci dit, il faut reconnaître que von Neumann et Morgenstern ont très bien développé l'application de la théorie des jeux à l'Economie politique.

II. *Physique mathématique*

Sans aucun doute, les activités exercées par Borel pendant la première guerre, — activités qui l'ont amené à étudier des problèmes concrets — ont conduit Borel à s'intéresser de plus en plus à la Physique. Mais cet intérêt s'était déjà manifesté auparavant et pour des raisons toutes différentes.

Dès 1906, Borel s'occupe de la théorie cinétique des gaz et de la loi de Maxwell correspondante, après avoir constaté combien sont insuffisantes les diverses démonstrations de cette loi. Pour y apporter la rigueur [96], il prépare le lecteur en étudiant d'abord la répartition des petites planètes et montrant la nécessité de donner un sens aux positions antérieures du problème. Dans le cas des gaz, la discussion est un peu plus compliquée, mais elle l'amène encore à rejeter les formes du problème antérieurement admises et à leur substituer un problème qui, après une réduction que nous allons expliquer, prend la forme G énoncée plus loin.

On part d'hypothèses précises sur les molécules du gaz, qui conduisent à ramener l'étude du gaz à celui du mouvement de n sphères égales se mouvant dans un certain domaine où elles peuvent se réfléchir à la suite d'un choc, soit sur les parois, soit entre deux d'entre elles. Borel ramène le mouvement des n centres des n sphères dans l'espace usuel à 3 dimensions au cas du mouvement d'un point P dans un domaine D de l'espace à 3 n dimensions, où les lois de la réflexion sur les parois sont analogues aux lois classiques. En vertu de la conservation de l'énergie, la vitesse de P est constante. Soit $\overline{OV}$ le vecteur d'origine fixe O, équipollent à cette vitesse. V se déplace sur une sphère S. Borel énonce alors ainsi la forme finale, G, qu'il donne au problème.

Il admet que la position de la paroi et les données initiales sont des éléments aléatoires dont les lois de probabilité sont connues. Le problème est de déterminer la probabilité que le point V soit dans un domaine élémentaire $d\omega$ de la surface de S à une époque t comprise entre des limites connues, que l'on fera ensuite croître indéfiniment.

Borel démontre alors que la probabilité limite cherchée est proportionnelle à $d\omega$, c'est-à-dire que toutes les directions de OV sont également probables (pour un temps suffisamment long).

En précisant le calcul, Borel retrouve enfin la loi de Maxwell. D'après lui, ce calcul fournit la plus simple des démonstrations rigoureuses de cette loi.

Dans sa conférence au Rice Institute [S., p. 317], Borel étudie plusieurs aspects du passage du fini à l'infini en mathématique et observe le parallélisme avec le problème de savoir si la Nature est discontinue ou continue, ce qui entraîne la question de la légitimité en Physique des théories moléculaires.

Borel note d'abord que c'est souvent « une simplification en Mathématiques que de remplacer par l'infini un nombre fini très grand ». Il en cite plusieurs exemples. Limitons-nous au premier qui conduit à constater « que le calcul des intégrales définies est souvent plus simple que celui des formules sommatoires ». Mais il étudie aussi le passage inverse de l'infini au fini, qui correspond en physique à l'introduction des théories moléculaires. Il observe alors que « les considérations basées sur l'existence des molécules n'y jouent qu'un rôle auxiliaire ».

« La théorie moléculaire a donc été un guide précieux pour l'analyste en lui suggérant la marche à suivre pour étudier les équations du problème, mais elle est éliminée de la solution définitive ».

On pourrait encore préciser ces réflexions. Il est exact que, pendant longtemps, les mathématiciens ont abordé les problèmes où figuraient des variables continues en remplaçant celles-ci par des variables discontinues et passant à la limite. Comme le dit Borel, cette façon de procéder permettait de pressentir la forme de la solution. Mais pour établir celle-ci, il fallait établir l'existence et la forme d'une limite et c'était là souvent un problème très difficile. Depuis lors, la tendance s'est faite jour, de plus en plus, d'éviter cette difficulté en cherchant à préciser dans la discussion du cas discontinu tout ce qui gardait un sens, que le nombre des valeurs des variables soit fini ou non. On arrive ainsi à une solution s'appliquant directement au problème posé dans le cas continu. C'est ainsi que l'étude des équations intégrales symétriques faite par Hilbert en résolvant le problème difficile

d'un passage à la limite s'est révélée à la fois plus simple et plus élégante dans l'étude directe de E. Schmidt. Un exemple analogue est fourni par la démonstration de Fredholm de l'existence d'une solution de son équation intégrale. Sa marche est analogue à celle de la solution d'un système de n équations linéaires à n inconnues; mais si elle s'est trouvée ainsi guidée par l'étude de ce problème, à aucun moment sa démonstration ne fait intervenir le passage à la limite du cas d'un nombre fini de variables à un nombre infini.

Borel revient au cas discontinu en observant qu'il « peut être intéressant de se proposer, au point de vue purement mathématique, l'étude directe de fonctions ou d'équations dépendant d'un nombre fini de variables, mais très grand ». Il se trouve alors ramené à une question qui lui tient à cœur et qu'il a souvent agitée sous différentes formes:

« La première difficulté qui se présente lorsqu'on veut étudier des fonctions d'un très grand nombre de variables, est la définition précise d'une telle fonction, j'entends par là une définition *individuelle*, permettant de distinguer la fonction définie de l'infinité des fonctions analogues ». Borel se demande « si l'on peut considérer comme donné » un ensemble de nombres dont « la vie d'un homme ne suffirait à en énumérer une faible partie ». Pour lui, un tel ensemble peut être considéré comme déterminé « par la connaissance d'une formule assez simple pour être effectivement écarté, tandis qu'il n'est pas possible d'écrire effectivement autant de nombres distincts . . . ». Il peut être aussi déterminé en considérant l'ensemble comme l'ensemble des valeurs que peut prendre un nombre aléatoire dont la loi de probabilité est donnée.

Ces considérations sont tout à fait justifiées quand il s'agit de définitions et d'applications « constructives ». S'il s'agit de définitions et d'applications « descriptives », la situation est différente. La démonstration, par exemple, que le terme général d'une série convergente tend vers zéro quand son rang croît indéfiniment, nous paraît correcte sans que ce terme général soit représenté par une formule simple ou qu'il relève du calcul des probabilités et même si la vie d'un homme ne suffisait pas à énumérer une faible partie de la suite des termes de la série.

Cette observation n'enlève rien à l'intérêt de la distinction que fait Borel des ellipsoïdes « très irréguliers » parmi les ellipsoïdes dans un espace à un très grand nombre de dimensions. Borel appelle ainsi ceux pour lesquels la moyenne des inverses des quatrièmes puissances des longueurs des axes n'est pas du même ordre de grandeur que le carré de la moyenne des inverses des carrés des longueurs des axes. D'après Borel, il convient, pour obtenir des résultats utiles sur les ellipsoïdes, d'exclure ces ellipsoïdes très irréguliers. « Lorsqu'un ellipsoïde n'est pas très irrégulier, plusieurs de ses propriétés permettent de l'assimiler à une sphère ». . .

« Une figure qui dépend d'un nombre extrêmement grand de paramètres ne peut être considérée comme numériquement déterminée que si ses paramètres sont définis au moyen de données numériques assez peu nombreuses pour nous être accessibles ».

Plus loin, Borel développe les raisons pour lesquelles il convient souvent de remplacer une variable ayant un nombre de valeurs fini mais très grand par une variable ayant une suite infinie mais énumérable de valeurs. Et ceci, plutôt que par une variable continue comme on faisait en physique mathématique classique où l'on supposait la matière continue.

Une autre des suggestions mathématiques qu'offrent les théories moléculaires concerne les fonctions d'une variable complexe. Pour le montrer, Borel considère le potentiel d'un système formé d'une suite infinie de points isolés, la masse concentrée en chacun de ces points étant finie ainsi que la masse totale. Pour simplifier, limitons-nous au cas d'un système plan et, par suite, d'un potentiel dit logarithmique. Supposons, de plus, que les masses sont réparties en un ensemble de points qui, dans une certaine région, est partout dense. Mais « l'hypothèse que les masses attirantes sont de simples points matériels sans dimension est difficile à accepter au point de vue physique. On est ainsi conduit à disperser cette masse dans un petit cercle ayant le point pour centre sans changer le potentiel à l'extérieur de ce cercle qu'on nommera le cercle d'action de son centre. On répartit les masses et les densités de telle manière que la densité s'annule ainsi que ses dérivées sur le périmètre du cercle; elle est ainsi non seulement finie mais continue ».

Borel démontre que, par une répartition convenable de la densité, on arrive à un résultat qui peut étonner. On aurait pu craindre qu'il n'y eût pas de place libre entre des points matériels tellement serrés par hypothèse. En fait, Borel démontre « qu'il y a des points en lesquels se croisent une infinité de droites sur lesquelles la densité est nulle; en ces points, la fonction potentielle logarithmique satisfait à l'équation de Laplace ».

Borel passe alors à la situation correspondante dans la théorie des fonctions d'une variable complexe. Soit une fonction à pôles denses dans une région; on peut définir dans cette région « une infinité de droites, se croisant dans tous les sens, la fonction admettant des dérivées continues sur ces droites et la dérivée ayant la même valeur dans toutes les directions en chacun des points de croisement de ces droites. Nous retombons ainsi sur la théorie des fonctions monogènes résumée plus haut (p. 69), mais reliée ici à une théorie physique moléculaire. C'est une extension magnifique de la théorie des fonctions analytiques grâce à laquelle Borel a pu dépasser l'extension précédente due à Weierstrass.

A la fin du même mémoire, Borel survolant son sujet, s'exprime ainsi: « C'est toujours au contact de la Nature que l'Analyse mathématique s'est renouvelée, ce n'est que grâce à ce contact permanent qu'elle a pu échapper au danger de devenir un pur symbolisme, tournant en rond sur lui-même ». On ne saurait mieux dire, pourvu qu'on complète cette assertion. Les mathématiciens sont, en effet, nécessairement amenés à réaliser un travail interne, consistant en une refonte continuelle de l'armature des mathématiques, pour les simplifier et les harmoniser. Il y a une tendance vers l'abstraction qui semble éloigner les mathématiques de la Nature, mais qui, en réalité, n'a pour but que de dégager l'essentiel et le commun dans les problèmes, généralement particuliers, posés par la Nature et ainsi de rendre leurs solutions applicables à de nouveaux problèmes posés par la Nature.

L'irréversibilité.

Depuis Loschmidt en 1876, on fait souvent la remarque suivante: les équations de la dynamique ne sont pas modifiées

quand on change les signes des vitesses, ce qui revient à changer le signe du temps. Ces équations ne permettent donc pas de prévoir dans l'avenir une évolution différente de ce que serait l'évolution en remontant vers le passé. Dès lors, il semble en résulter que les phénomènes irréversibles sont impossibles. Borel a donné [S., p. 341] une explication de ce paradoxe.

Il admet que cette objection serait valable, si toutes les conditions initiales étaient données avec une exactitude absolue. Mais cette hypothèse lui parait irréalisable. Cette exactitude absolue devra laisser place à un certain flottement. Il en résulte que l'avenir n'est pas entièrement déterminé, alors qu'on ne peut parler d'une indétermination du passé. Il n'y a donc plus une réversibilité absolue. Dans certains cas, on aura des phénomènes presque réversibles, dans d'autres ils seront irréversibles.