I. Calcul des probabilités

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Les travaux de Mathématiques appliquées

Nous avons expliqué plus haut, p. 17, que, si c'est après la première guerre mondiale que Borel s'est particulièrement occupé des mathématiques appliquées, il s'y était intéressé déjà auparavant en raison de leur connexion avec certains de ses travaux de mathématiques pures.

Parmi les mathématiques appliquées, Borel a consacré surtout son attention et ses recherches au calcul des probabilités et à la physique mathématique.

I. Calcul des probabilités

Là encore, Borel a été un initiateur en introduisant implicitement la conception de convergence presque certaine, liée à une généralisation remarquable du théorème de Bernoulli et en créant la théorie des jeux psychologiques.

Remarques. — L'idée a été émise que les idées les plus originales de Borel ont été publiées avant la première guerre et concernent toutes l'Analyse. Nous croyons que les deux sujets que nous venons de mentionner sont d'une originalité aussi grande et ont chacun donné lieu aussi à d'innombrables publications postérieures, par ses contemporains et successeurs.

En sortant du calcul des probabilités, les quatre définitions (non équivalentes) mentionnées plus haut, p. 58, de la raréfaction d'un ensemble de mesure nulle, étaient tout à fait inattendues et n'ont pourtant été développées par Borel qu'après la seconde guerre mondiale.

Probabilités dénombrables.

I. Avant Borel, on avait étudié, comme lui, le cas d'une infinité dénombrable d'épreuves. Mais on s'était limité aux propriétés asymptotiques d'une probabilité dépendant d'un nombre fini croissant d'épreuves. Avec Borel s'ouvre un domaine tout nouveau dans le calcul des probabilités: celui des probabilités « dénombrables ». Et Borel réussit à trouver les valeurs exactes

des probabilités d'événements dont la réalisation dépend d'une infinité d'épreuves.

Il commence par démontrer un théorème fondamental et assez inattendu [S., p. 163].

Soient $E_1, E_2, \ldots E_n \ldots$ une suite d'événements indépendants et $p_1, p_2, \ldots p_n, \ldots$ leurs probabilités respectives. La probabilité pour qu'une infinité de ces événements se réalisent est égale à 0 si la série Σp_n est convergente et 1 si elle est divergente.

En appelant A_k la probabilité pour que k des événements E_i se produisent, Borel a complété son théorème en montrant que si Σp_k est convergente, les A_k ne sont pas nulles (au contraire de A_∞); si Σp_k est divergente, les A_k sont nulles (alors que $A_\infty = 1$).

Enfin, dans un mémoire ultérieur, [S. p. 302], Borel a étendu son théorème au cas où les E_i ne sont pas indépendants, moyennant certaines restrictions sur le sens à attribuer aux cas de convergence et de divergence.

Dans le même mémoire, Borel réalise un progrès encore plus grand. Mais, suivant une caractéristique de son esprit que nous avons signalée plus haut, ce progrès est réalisé dans des cas particuliers et il laisse au lecteur ou à ses successeurs le soin d'en comprendre et d'en formuler la portée générale. Il s'agit, d'une part, d'un théorème apportant une précision nouvelle et très importante au théorème de Bernoulli et, d'autre part, de la conception d'une nouvelle sorte de convergence: la convergence presque certaine (dite aussi presque sûre).

Borel ne considère explicitement que le cas où l'on étudie la fréquence φ_n [1] d'un chiffre déterminé dans les n premiers chiffres d'un nombre N pris au hasard (en supposant que la probabilité de l'apparition d'un chiffre déterminé est indépendante de ce chiffre et par suite, égale à $\frac{1}{10}$). Quand n croît, la convergence de φ_n vers $\frac{1}{10}$ est un événement fortuit, Borel démontre que la probabilité de cet événement est égale à l'unité. Mais le raisonne-

---

1) La fréquence d'un événement dans n épreuves est le rapport $\frac{r_n}{n}$ où r_n est le nombre de répétitions de l'événement dans les n épreuves.

ment de Borel est général et permet d'énoncer explicitement le résultat suivant:

Soient f_n la fréquence de n épreuves indépendantes d'un événement E de probabilité constante p. Alors la probabilité que f_n tende vers p est égale à l'unité.

On voit immédiatement qu'on a là un énoncé à la fois plus frappant et plus précis que celui du théorème de Bernoulli. D'après ce dernier, il est très probable que $| f_n - p |$ soit petit quand n est grand, mais il n'en résulte pas que f_n tende vers p. Au contraire, si l'on admet le théorème de Borel, le théorème de Bernoulli en résulte, c'est-à-dire que si ε est un nombre positif arbitraire, la probabilité pour que $| f_n - p | < \varepsilon$ tend vers l'unité quand $n \to \infty$. Le théorème de Bernoulli est donc une simple conséquence d'un théorème plus général, celui de Borel et une conséquence moins simple à saisir — et pour cette raison, souvent mal interprétée — du théorème de Borel.

On n'a malheureusement pas encore pris l'habitude de considérer le théorème de Borel sous cet aspect. Avant Borel, le théorème de Bernoulli était un théorème fondamental. Après Borel, c'est le théorème de Borel qui doit lui être substitué.

La démonstration de Borel est analytique, mais il avait indiqué qu'on pourrait donner aussi une démonstration géométrique de son théorème. Cette démonstration géométrique a été explicitement obtenue, plus tard, par F. Hausdorff.

La démonstration analytique de Borel est assez compliquée. Une démonstration à la fois plus simple et d'une portée plus générale a été donnée plus tard par Cantelli. Mais on doit noter que la démonstration de Borel a l'avantage de se prêter mieux à une étude plus précise du comportement de la fréquence.

Nous avons aussi signalé plus haut une autre caractéristique du théorème de Borel: c'est qu'il introduit (encore une fois implicitement) une espèce nouvelle de convergence: « la convergence presque certaine ».

Généralisant la circonstance qui se présente dans le théorème de Borel, on est partout convenu maintenant de dire qu'un nombre aléatoire X_n converge presque certainement vers un nombre aléatoire X quand la convergence de $X_1, X_2, \ldots X_n \ldots$

vers X est un événement presque certain, c'est-à-dire dont la probabilité est égale à l'unité.

On peut dire que par la précision donnée au théorème de Bernoulli et par l'introduction de la convergence presque certaine, Borel s'est placé au premier rang des successeurs de Laplace et de Poincaré.

II. Poursuivant son étude des « probabilités dénombrables », Borel considère [S., p. 131] les lois de probabilité des quotients incomplets, A_n, de la fraction continue

$$X = \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{1}{A_2 + \dots}}$$

représentant un nombre incommensurable X compris entre 0 et 1 et dont la loi de probabilité est uniforme.

En appelant $\varphi(n)$ une fonction positive croissante de n, Borel trouve que:

I si la série $\Sigma \dfrac{1}{\varphi(n)}$ est convergente, la probabilité pour que l'on ait

$$A_n < \varphi(h)$$

à partir d'un certain rang est égale à un;

II si cette série est divergente, il y a une probabilité égale à un pour que l'on ait

$$A_n > \varphi(n)$$

à partir d'un certain rang.

En d'autres termes, il est infiniment probable que la croissance asymptotique de A_n est comprise entre celle de toute fonction $\varphi(n)$ telle que la série $\Sigma \dfrac{1}{\varphi(n)}$ soit convergente et celle de toute fonction $\varphi(n)$ telle que cette série soit divergente.

Dans le même mémoire, Borel exprime une opinion qu'il a souvent répétée, à savoir qu'une « probabilité nulle ou extrêmement petite doit être considérée comme équivalent à l'impossibilité ». C'est une opinion qui avait déjà été formulée, longtemps auparavant, par Buffon, puis par Cournot. Buffon et Borel ont

même chiffré, chacun de leur côté, ce qu'ils appellent «extrêmement petite». Borel en a donné une image concrète très frappante, le « miracle des singes dactylographes ». Peut-on concevoir que si un million de singes travaillaient dix heures par jour sur un million de machines à écrire et si leur production était successivement reliée en volumes, l'ensemble des volumes obtenus au bout d'un an se trouverait renfermer la copie exacte des livres de toute nature et de toutes les langues conservés dans les plus riches bibliothèques du monde? Il n'est douteux pour personne qu'un tel événement doit être considéré comme impossible, bien que sa probabilité si elle est extraordinairement petite, ne soit pas rigoureusement nulle.

Théorie des jeux stratégiques.

Sortant de la théorie pure pour aller vers les applications (du calcul des probabilités), Borel s'est encore ici montré un novateur dont les idées et les résultats ont donné lieu à un nombre énorme de travaux.

Jusqu'à lui — sauf dans des problèmes très particuliers dont aucune généralisation n'était entreprise — l'étude des jeux de hasard en calcul des probabilités s'était bornée aux cas où chacun des événements considérés avait une probabilité déterminée: jeu de pile ou face, jeu de dés, etc. L'intelligence, le caractère des joueurs n'y avaient aucune part. Il n'en est pourtant rien dans la plupart des jeux en usage: jeu de dames, jeu d'échecs, jeu de bridge, etc. ... On doit alors admirer avant tout que Borel ait eu l'audace de vouloir établir une théorie générale des jeux psychologiques et de concevoir la possibilité d'y parvenir en appliquant le calcul des probabilités à des hypothèses convenablement choisies. Il a choisi, à cet effet, des hypothèses plausibles, et a pu déterminer dans des cas particuliers les conséquences de ces hypothèses. Ce n'est pas tout; il a aperçu, dès sa première publication sur ce sujet, que le problème posé par lui avait des applications dans des domaines variés: économie politique, stratégie, psychologie, etc. ...

Pour éclairer ce qui précède, il nous faut, maintenant, préciser les hypothèses de Borel. Contrairement à certains esprits, nous ne pensons pas que ces hypothèses soient inéluctables et

d'ailleurs elles ont été discutées. Mais ce sont des hypothèses qui, d'une part, sont plausibles et qui, d'autre part, se prêtent à un traitement mathématique du problème, deux qualités qui sont très loin d'être toujours conciliables. L'un des principaux mérites de Borel est d'avoir montré qu'un tel choix d'hypothèses est possible, même si l'on n'admet pas qu'il soit nécessairement le seul ni le meilleur possible.

Les hypothèses de Borel.

A chaque coup à jouer, un joueur se trouve dans une circonstance déterminée dont certains éléments lui sont connus; par exemple, au jeu de cartes, l'ensemble des cartes qu'il a dans la main et la suite des coups précédents. Sur la base de ces données et sur l'hypothèse qu'il fait sur la psychologie des autres joueurs, il décide son coup. Borel élimine cette hypothèse [1] et considère l'ensemble des données et du choix du joueur. Il y a, dans la plupart des jeux, un nombre fini, quoique très grand, de tels ensembles. Au cours d'un jeu, un joueur adopte successivement un nombre fini de tels ensembles et caractérise ainsi sa « méthode de jeu ». Il y a un nombre fini de méthodes de jeu possibles: C_1, C_2, ... C_n et chaque joueur adopte nécessairement l'une d'elles à chaque coup. Mais il y a au début du jeu (par exemple, quand on distribue les cartes) ou au cours du jeu, une intervention du hasard. Si donc, en considérant le cas de deux joueurs, A et B, le joueur A adopte la méthode de jeu C_i et le joueur B la méthode C_k, c'est le calcul des probabilités qui permettra de calculer la probabilité π_{ik} pour que A gagne finalement. On a alors à chercher d'abord s'il existe une méthode de jeu C_i pour A, telle que π_{ik} soit positif quel que soit k (c'est-à-dire quelle que soit la méthode C_k adoptée par B). Alors A aurait intérêt à adopter la méthode C_i (ou l'une des méthodes C_i pour lesquelles π_{ik} est positif quel que soit k).

Borel se place dans le cas où une telle méthode de jeu n'existe pas et il se demande s'il n'est pas possible de jouer d'une manière avantageuse en variant son jeu. « Si l'on veut formuler une règle précise pour varier le jeu, cette règle ne faisant intervenir que

---

1) Voir page suivante, la citation où Borel énonce cette élimination, qui évidemment, éloigne un peu la théorie de la réalité.

les faits observés et non pas des remarques psychologiques sur le joueur auquel on est opposé, cette règle équivaut forcément à un énoncé tel que le suivant: la probabilité pour que, en un moment donné du jeu, A adopte, pour fixer sa conduite à ce moment, le code C_i est p_i; la probabilité analogue pour B pourra être désignée par q_k et, en désignant par n le nombre de codes qui subsistent, on a

$$\sum_{i=l}^{n} p_i = 1, \qquad \sum_{k=l}^{n} q_k = 1'' \tag{1}$$

La probabilité de gain de A est donc

$$P = \sum_{i=l}^{n} \sum_{k=l}^{n} \pi_{ik}\, p_i\, q_k \,.$$

Borel se place alors, pour simplifier, dans ce qu'il appelle le cas symétrique, caractérisé par l'égalité $\pi_{ii} = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire que si les deux joueurs adoptent la même méthode de jeu, leurs chances de gagner sont égales. Il observe que dans la plupart des jeux de cartes où l'un des joueurs joue le premier, ces deux chances ne sont pas égales, mais qu'elles le deviennent si le jeu consiste en deux parties où l'un des joueurs commencera le jeu dans la première et l'autre dans la seconde. Comme on a évidemment

$$\pi_{ik} + \pi_{ki} = 1$$

ou

$$\pi_{ik} = \frac{1}{2} + \alpha_{ik}\,, \quad \pi_{ki} = \frac{1}{2} + \alpha_{ki}$$

avec $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0$, on aura

$$P = \frac{1}{2} + \alpha\,,$$

avec $\alpha = \sum_{i=l}^{n} \sum_{k=l}^{i-l} \alpha_{jk} (p_i\, q_k - p_k\, q_i)$.

Tout ce qui précède figure dans la première Note de Borel.

Dans cette même Note, Borel prouve que, dans le cas où $n = 3$, « il est facile de trouver des nombres positifs p_1, p_2, p_3 vérifiant (1) et tels que α soit nul et donc $P = \frac{1}{2}$ quels que soient les nombres q_1, q_2, q_3. Il est donc possible d'adopter une manière de jouer permettant de lutter avec des chances égales contre tout joueur ».

Dans sa dernière Note sur les jeux, Borel procède autrement mais ramène au même problème mathématique. Au lieu de partir de la probabilité pour le joueur A de gagner, il part du gain moyen de A, soit g_{ik} quand A adopte le code C_i et B le code C_k. La symétrie du jeu entraîne

$$g_{ik} + g_{ki} = 0 .$$

Quand les codes C_i et C_k ne sont adoptés par A et B qu'avec les probabilités p_i et q_k, le gain moyen de A sera

$$G = \sum g_{ik}\, p_i\, q_k .$$

Par une méthode différente de la précédente, Borel montre alors que, pour $n = 3$ et $n = 5$, on peut trouver des probabilités q_k telles que G soit nul quels que soient les p_i.

Le problème de démontrer qu'il n'en est pas ainsi avait été d'abord prouvé insoluble pour $n = 3$ par Borel. Dans ses Notes successives, il lui avait paru d'abord soluble pour $n = 5$; puis ayant pu prouver qu'il était insoluble pour $n = 5$, il avait à ce moment pensé qu'il était soluble pour $n = 7$. Enfin, il termine sa dernière Note en écrivant que ce même problème « insoluble pour $n = 3$ et $n = 5$ me paraît également insoluble pour $n = 7$. Il serait intéressant, soit de démontrer qu'il est insoluble en général, soit d'en donner une solution particulière ».

Il est clair que l'évolution de sa pensée le conduit à croire que, quel que soit le nombre n des manières de jouer, on peut choisir les probabilités q_k pour B de choisir les codes C_k de sorte que, quelles que soient les probabilités p_i pour A de choisir les codes C_i, la moyenne du gain total de A et celle du gain total de B soient toutes deux nulles.

Toutefois, on doit constater que Borel n'a pas démontré qu'il en était ainsi quel que soit n et qu'il n'a même pas,

contrairement à son habitude, exposé en détail dans un mémoire, les Notes qui résumaient ses résultats dans les C.R.

On peut trouver l'explication de ces faits dans l'évolution de ses activités. Borel, pendant une certaine période, a, en effet, été pris de plus en plus par son activité politique (voir p. 12). D'abord maire de sa ville natale, puis conseiller général de son département, il a été élu député en 1924 et l'est resté jusqu'en 1936. Dans l'intervalle, il a même été quelques mois, ministre de la Marine et nous avons même eu l'honneur de le remplacer comme professeur et de le dispenser ainsi de faire ses cours à la Faculté des Sciences. De sorte qu'après avoir posé le problème et l'avoir résolu dans les cas les plus simples, Borel n'a plus eu le temps d'étudier en détail le problème mathématique qui restait à résoudre.

C'est après la dernière Note (de 1927) de Borel que von Neumann en 1928, adoptant exactement les mêmes hypothèses, a réussi à démontrer un théorème (dit du minimum — maximorum) équivalent au théorème de Borel, dans le cas général de n quelconque. Puis, associé avec l'économiste Morgenstern, il en a tiré une théorie économique générale.

La théorie de von Neumann-Morgenstern a eu un retentissement considérable, tandis que les Notes de Borel restaient ignorées. C'est pourquoi nous avons décidé de rappeler l'antériorité de Borel et nous avons publié dans « Econometrica » en 1953, une excellente traduction en anglais, réalisée par M. Savage des trois Notes les plus importantes de Borel, avec un commentaire. Nous avions auparavant communiqué ce commentaire à von Neumann dont la réponse a été publiée dans le même numéro d'Econometrica. Tout naturellement von Neumann a réagi vigoureusement, alléguant que rien ne pouvait être retenu de la théorie de Borel, avant sa propre démonstration du théorème général. D'après lui « en 1921 et ultérieurement Borel suppose que le théorème est ou risque d'être faux ». Mais si cette assertion est rigoureusement exacte, elle doit être complétée par la citation de Borel faite plus haut, montrant que Borel a fini par pencher vers l'exactitude générale du théorème.

Von Neumann ajoutait « j'avais moi-même élaboré mes idées sur le sujet avant d'avoir lu ses Notes (les Notes de Borel) ».

Mais en tout cas, il en avait lu une avant de publier son premier Mémoire (de 1928) où il cite lui-même cette Note de Borel.

Si notre publication dans *Econometrica* avait révélé à beaucoup l'antériorité de Borel, elle n'avait pas atteint tous les intéressés. C'est pourquoi, d'accord avec M. Guitton, rédacteur de la Revue d'Economie politique, nous avons publié, dans cette revue en 1959, à nouveau, mais cette fois en français, dans le texte original, les trois Notes de Borel et notre commentaire ainsi que la traduction du commentaire en anglais de von Neumann.

Dans les innombrables publications sur les jeux psychologiques et sur leurs applications à l'Econométrie, il ne sera plus admissible d'ignorer l'antériorité de Borel.

Malheureusement, tel n'est pas encore le cas. En 1959, dans une Notice, d'ailleurs très intéressante sur le grand mathématicien que fut von Neumann, l'auteur commence ainsi:

« Theory of games.

The essential ingredients of von Neumann's theory of games are already to be found in his 1928 paper . . .

The first application of game theory to an economic problem was given in a 1937 paper ».

Et sur ces deux sujets, le nom de Borel n'est même pas mentionné. Or:

1° le premier mémoire de von Neumann sur la théorie des jeux a été publié après la dernière Note de Borel sur le même sujet, et en connaissance de la théorie de Borel, qu'il cite. Les hypothèses à la base de la théorie de von Neumann sont en outre identiques à celles de Borel.

2° Borel, et non von Neumann, a été le premier à signaler que la théorie des jeux est applicable, non seulement à l'Economie politique, mais aussi à l'art militaire, à la psychologie, etc.

Ceci dit, il faut reconnaître que von Neumann et Morgenstern ont très bien développé l'application de la théorie des jeux à l'Economie politique.