

# 4. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION NON-HOMOGENÈNE $T(y) = f(x)$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

### 3. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION HOMOGÈNE $T(y) = 0$ .

Considérons l'équation homogène  $T(y) = 0$  et écrivons que le polynome arbitraire  $y_0 = Q_n(x)$  vérifie cette équation. Nous aurons, utilisant la représentation (8) des  $P_m(x)$ ,

$$T(y_0) = \int_0^1 g(t) \sum_{i=0}^n \frac{(t-x)^i}{i!} y_0^{(i)}(x) dt \equiv 0$$

et comme la somme n'est autre que le développement taylorien de  $y_0(t)$  au voisinage de  $t = x$ , cette condition, *indépendante de  $x$* , devient

$$\int_0^1 g(t) y_0(t) dt = 0 \quad (13)$$

ou bien, tenant compte de (12) et de (9),

$$\sum_{i=0}^n C_i \gamma_{n-i} = 0, \quad (\gamma_0 \neq 0). \quad (14)$$

Le coefficient  $C_n$  s'exprime donc linéairement en fonction des  $n$  coefficients arbitraires  $C_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ).

### 4. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION NON-HOMOGÈNE $T(y) = f(x)$

Passons à l'équation non-homogène (3) et observons qu'elle peut être obtenue en intégrant l'équation (10) multipliée par  $\frac{P_n(x)}{n!}$ , de sorte que nous pourrions écrire pour la solution particulière  $Y(x)$  donnée par (11) [où l'on pose  $Q_n(x) \equiv 0$ ]

$$T(Y) = f(x) - f(a) \quad (15)$$

La constante d'intégration doit être égale à  $-f(a)$  car, d'après les conditions (6), l'expression  $T(Y)$  s'annule pour  $x = a$ .

Ceci précisé, cherchons une solution particulière  $Y_p(x)$  de (3) qui soit de la forme  $Y_p = Y + h$ , avec  $h$  constante. Nous aurons, grâce à la linéarité de  $T(y)$ ,

$$T(Y+h) = T(Y) + T(h) = f(x)$$

ou bien, d'après (13) et observant que  $T(h) = (-1)^n h \cdot P_0$ ,

$$h = (-1)^n \frac{f(a)}{P_0}. \quad (16)$$

La solution générale cherchée sera alors

$$y = Q_n(x) + \int_a^x (x-t)^n \frac{f'(t)}{P_n(t)} dt + (-1)^n \frac{f(a)}{P_0} \quad (17)$$

ou bien, en intégrant par parties et tenant compte de (14) pour éliminer  $C_n$ , elle aura l'expression

$$y = \sum_{i=0}^{n-1} C_i [x^{n-i} - (-1)^{n-i} P_{n-i}(0)] + \left[ \frac{(-1)^n}{P_0} - \frac{(x-a)^n}{P_n(a)} \right] f(a) \\ + n \int_a^x (x-t)^{n-1} \frac{P_n(t) + (x-t) P_{n-1}(t)}{P_n^2(t)} f(t) dt. \quad (18)$$

## 5. OBSERVATIONS.

a) Sous la forme (17), la résolution de (3) nécessite l'existence et l'intégrabilité de la dérivée  $f'(x)$ , tandis que *la forme (18) ne suppose que l'intégrabilité de  $f(x)$ .*

b) L'expression (18) met en évidence  $n$  fonctions fondamentales de (3) — les polynômes qui multiplient les constantes arbitraires  $C_i$ . *Elles ont été déterminées sans résoudre aucune équation algébrique caractéristique*, propriété qui constitue un avantage d'ordre pédagogique sur les équations linéaires à coefficients constants ou sur les équations d'Euler.

c) *La solution générale (18) de l'équation (3) appartient à la classe  $C^n[a, b]$  si la fonction connue  $f(x)$  est bornée et intégrable sur tout intervalle  $[a, b]$  de l'axe  $Ox$ , où  $a$  et  $b$  sont compris entre deux racines consécutives réelles de l'équation  $P_n(x) = 0$ .*

d) Si  $c$  est une racine réelle de cette équation  $P_n(x) = 0$ , la droite  $x - c = 0$  est encore une intégrale car le long de cette droite  $dx = 0$ .