5. Observations.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

ou bien, d'après (13) et observant que $T(h) = (-1)^n h . P_0$,

$$h = (-1)^n \frac{f(a)}{P_0} \tag{16}$$

La solution générale cherchée sera alors

$$y = Q_n(x) + \int_a^x (x-t)^n \frac{f'(t)}{P_n(t)} dt + (-1)^n \frac{f(a)}{P_0} \tag{17}$$

ou bien, en intégrant par parties et tenant compte de (14) pour éliminer C_n, elle aura l'expression

$$y = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \left[x^{n-i} - (-1)^{n-i} P_{n-i}(0)\right] + \left[\frac{(-1)^n}{P_0} - \frac{(x-a)^n}{P_n(a)}\right] f(a)$$

$$+ n \int_a^x (x-t)^{n-1} \frac{P_n(t) + (x-t) P_{n-1}(t)}{P_n^2(t)} f(t)\, dt . \tag{18}$$

5. Observations.

a) Sous la forme (17), la résolution de (3) nécessite l'existence et l'intégrabilité de la dérivée $f'(x)$, tandis que *la forme (18) ne suppose que l'intégrabilité de* $f(x)$.

b) L'expression (18) met en évidence n fonctions fondamentales de (3) — les polynomes qui multiplient les constantes arbitraires C_i. *Elles ont été déterminées sans résoudre aucune équation algébrique caractéristique*, propriété qui constitue un avantage d'ordre pédagogique sur les équations linéaires à coefficients constants ou sur les équations d'Euler.

c) *La solution générale (18) de l'équation (3) appartient à la classe* $C^n[a, b]$ *si la fonction connue* f (x) *est bornée et intégrable sur tout intervalle* [a, b] *de l'axe* Ox, *où* a *et* b *sont compris entre deux racines consécutives réelles de l'équation* $P_n(x) = 0$.

d) Si c est une racine réelle de cette équation $P_n(x) = 0$, la droite $x - c = 0$ est encore une intégrale car le long de cette droite $dx = 0$.

e) La solution (17) existe aussi pour $a = c$, racine de $P_n(x)$, (d'ordre de multiplicité m) si la fonction $f(x)$ admet une dérivée au voisinage de c où celle-ci se présente sous la forme

$$f'(x) = (x-c)^q f_1(x)$$

avec $f_1(c) \neq 0, \infty$ et $q \geqq m$, car c est une singularité apparente pour $\dfrac{f'(t)}{P_n(t)}$. Le cas $m-1<q<m$ conduit à des intégrales généralisées, les solutions effectives de (3) étant données par (17) (pour $a = c$), et seulement le cas $q \leqq m-1$ est à rejeter une fois que les intégrales correspondantes de (17) sont divergentes au voisinage de c.

6. Généralisation de la méthode.

Le problème étudié s'étend d'une manière naturelle au cas des équations (3) qui peuvent être réduites par p dérivations à l'équation

$$Y^{(n+p)} = \frac{f_0^{(p)}(x)}{P_n(x)} \tag{19}$$

M. Const. Săulesco, étudiant III^e année, s'est proposé de trouver ces équations et a montré qu'elles se présentaient sous la forme

$$T_p(y) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_{p+i-1}^{p-1} P_n^{(i)}(x)\, y^{(n-i)}(x) = f_0(x) \tag{20}$$

où $P_n(x)$ est un polynome arbitraire du n-ième degré et C_a^b le nombre des combinaisons b à b de a objets. Une suite de p intégrations permet immédiatement d'effectuer le passage de (19) à (20), ce qui constitue une vérification directe.

Par l'introduction des polynomes de la classe Appell $P_n(x)$, $(n = 0, 1, \dots)$, qui satisfont aux relations

$$P_n^{(i)}(x) = n(n-1)\dots(n-i+1)P_{n-i}(x), \quad (i = 0, 1, \dots, n) \tag{21}$$

l'équation (20) prend la forme généralisant (3)