

# 9. Exemples.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

On obtient ainsi les relations

$$\int_0^1 g(t) \cdot t^{n+p-j} \left[ \frac{W_{p-1}^{(j)}(t)}{t^{n+1}} \right]^{(p-1-j)} dt = (-1)^n \frac{(p-1-j)!}{n!} f_0^{(j)}(0)$$

$$(j=0, 1, \dots, p-1), \quad (33)$$

qui conduisent aux valeurs cherchées des coefficients de  $W_{p-1}(x)$ , valeurs qu'il est inutile de transcrire ici.

Remarquons pour clôre cette synthétique exposition que l'on peut remplacer l'intervalle  $[0, x]$  par un intervalle quelconque  $[a, x]$  avec la même caractéristique —  $P_n(x)$  n'a aucune racine  $c$  dans cet intervalle — Il suffit pour cela d'introduire les développements de  $P_n(x)$ ,  $W_{p-1}(x)$  et  $f_0(x)$  suivant les puissances positives de  $(x-a)$ . Une fois effectué ce changement, l'intégrale de (29), étendue à l'intervalle  $[a, x]$ , ne figurera pas dans la résolution du problème de Cauchy

$$x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

si l'on prend  $x_0 = a$ , et l'on aura un système linéaire qui permettra de déterminer les divers coefficients de  $Q_{n+p-1}(x)$ .

## 9. EXEMPLES.

Un exemple simple pour l'équation (3) est constitué par l'équation

$$\frac{x^2 - 1}{2} y'' - xy' + y = f(x)$$

dont la solution générale s'écrit

$$y = C_0(x^2 + 1) + C_1x + \int_a^x (x-t)^2 \frac{f'(t)}{t^2 - 1} dt + f(a)$$

ou bien sous la forme (18)

$$y = C_0(x^2 + 1) + C_1x + \left[ \frac{1}{2} - \frac{(x-a)^2}{a^2 - 1} \right] \cdot f(a)$$

$$+ 2 \int_a^x (x-t) \frac{tx - 1}{(t^2 - 1)^2} f(t) \cdot dt$$

avec la condition  $a^2 \neq 1$  si  $f(a) \neq 0$ .

La solution du problème de Cauchy ( $x = x_0, y = y_0, y' = y'_0$ ) peut être facilement déduite de cette dernière expression en prenant  $a = x_0 \neq \pm 1$ .

Un autre exemple est constitué par l'équation hypergéométrique du type (20)

$$(x - x^2) y'' - p(1 - 2x) y' - p(p + 1) y = f_0(x) \quad (34)$$

où  $\alpha = \gamma = -p, \beta = -(p+1)$ , dont la solution classique ne peut être mise sous la forme connue représentée par une intégrale,  $\beta$  étant un entier négatif. La solution (23) de l'équation homogène (20), dont les coefficients vérifient les conditions (24) qui prennent une forme simple

$$(j + 1) q_{j+1} + (p + 1 - j) q_j = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, p - 1)$$

s'écrit en fonction des constantes arbitraires  $C_1$  et  $C_2$

$$y_0 = C_1 x^{p+1} + C_2 \sum_{i=0}^p (-1)^i C_{p+1}^i x^i. \quad (35')$$

Cette solution a la forme plus simple

$$y_0 = \int_0^1 h(u) \frac{(x-u)^{p+1}}{(p+1)!} du \quad (35)$$

avec les conditions

$$\int_0^1 h(u) du = A_1, \quad \int_0^1 h(u) u^i du = A_2, \quad (i = 1, 2, \dots, p + 1)$$

$A_1$  et  $A_2$  étant des constantes arbitraires.

La solution générale de l'équation non-homogène (20) sera alors

$$y = y_0 + \frac{1}{(p+1)!} \int_a^x (x-t)^{p+1} \frac{f_0^{(p)}(t)}{t-t^2} dt + \sum_{i=0}^{p-1} w_i x^i \quad (a \neq 0; 1) \quad (36)$$

où

$$w_i = \frac{1}{(p-i+1)! i!} \sum_{j=i}^{p-1} (-1)^{j-i+1} (p-j-1)! \cdot f_0^{(j)}(0),$$

expression qui peut être facilement écrite sous une forme plus restreinte.

La vérification de (35') est immédiate puisque  $y_1 = x^{p+1}$  et  $y_2 = (1-x)^{p+1}$  sont des solutions particulières connues de l'équation homogène (34). Il en est de même de (36) qui peut être dérivée  $(p+2)$  fois dans les hypothèses faites.

### RÉSUMÉ

Les auteurs étudient une équation différentielle linéaire du  $n$ -ième ordre (3), à coefficients polynomes de la classe Appell, dont la résolution peut se faire par une voie élémentaire et qui assure une unité d'exposition au chapitre des équations différentielles du cours classique d'Analyse. Il est à remarquer que l'équation (3) a la même généralité que les équations à coefficients constants ou du type d'Euler sur lesquelles elle a l'avantage de ne pas introduire une équation algébrique caractéristique, les fonctions fondamentales étant immédiatement mises en évidence. Une extension de (3) a conduit M. C. Săulesco aux équations (20) ou (22) qui dépendent d'un paramètre entier  $p > 0$ , et l'exemple de l'équation hypergéométrique (24) permet la vérification directe des résultats exposés d'une manière trop succincte.

*(reçu le 1<sup>er</sup> avril 1964)*

Institut Polytechnique  
C. Dorobanti 232  
Bucarest (3)