UNE TRANSFORMATION VARIATIONNELLE APPARENTÉE A CELLE DE FRIEDRICHS, CONDUISANT A LA MÉTHODE DES PROBLÈMES AUXILIAIRES UNIDIMENSIONNELS

UNE TRANSFORMATION VARIATIONNELLE APPARENTÉE A CELLE DE FRIEDRICHS, CONDUISANT A LA MÉTHODE DES PROBLÈMES AUXILIAIRES UNIDIMENSIONNELS

par Joseph HERSCH

§ 1. Introduction

1.1. K. O. FRIEDRICHS ([5]; voir aussi [2], pp. 201-9) a découvert en 1929 une transformation variationnelle involutive, faisant passer d'un principe de Minimum caractérisant une grandeur d à un principe de Maximum « dual », caractérisant *la même* grandeur d. — L'intérêt numérique de cette double caractérisation est évident: si (comme c'est généralement le cas) la grandeur d ne peut être déterminée exactement, le premier principe permettra de l'évaluer par excès, le second de l'évaluer par défaut. — L'intérêt théorique est considérable: il réside surtout dans la dualité elle-même; mais aussi dans le fait que, appliquée à un problème aux limites, la transformation de Friedrichs fait passer du principe de Dirichlet au principe de Thomson (à propos de ces principes: cf. [13, 3]). — L'idée de base est très simple: si, dans un principe de Minimum, on élargit la classe des fonctions admises à concurrence, le Minimum diminue (ou reste inchangé).

1.2. Les raisonnements qui suivent s'appliquent à un nombre fini quelconque de dimensions; pour fixer les idées, nous considérons un domaine régulier G du plan, de contour Γ, et, dans G, un problème de variation initial (I) du type:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} d = \operatorname{Min}_v \iint\limits_G F(\vec{x}, v, \operatorname{grad} v)\, dA\,, \\ \text{sous la condition: } v = \chi(s) \text{ donnée sur } \Gamma\,; \end{cases}$$

$\vec{x}$ désigne le rayon vecteur (x, y), $dA = dxdy$ est l'élément d'aire, s mesure l'arc sur la courbe Γ.

La transformation de Friedrichs consiste à « dissocier » v de grad v dans l'intégrale ci-dessus: on y remplace grad v par un champ vectoriel $\vec{q}$ (alors on a $F(\vec{x}, v, \vec{q})$), et l'on traite les conditions auxiliaires $\vec{q}$ — grad $v = \vec{0}$ dans G et $v - \chi(s) = 0$ sur Γ à l'aide de multiplicateurs de Lagrange $\vec{p}(\vec{x})$ et $\mu(s)$ respectivement; v et $\vec{q}$ varient désormais indépendamment. On obtient ainsi un « problème libre »; on passe ensuite de celui-ci au « problème dual » (D) en *imposant à priori* les conditions naturelles suivantes du problème libre:

(1) $F_{\vec{q}} = \vec{p}$ (c'est-à-dire: $F_{q_i} = p_i$), et $F_v = \operatorname{div} \vec{p}$ dans G;

(2) $\vec{p} \cdot \vec{n} = \mu(s)$ sur Γ ($\vec{n}$ = normale extérieure).

On postule en général que, à l'aide des conditions (1), on puisse tirer v et $\vec{q}$ en fonction de $\vec{x}$, $\vec{p}$ et div $\vec{p}$. On pose alors (transformation de Legendre)

$$\Psi(x, \vec{p}, \operatorname{div} \vec{p}) = \vec{q} \cdot \vec{p} + v \operatorname{div} \vec{p} - F(\vec{x}, v, \vec{q}) \tag{3}$$

et l'on obtient le problème dual:

$$\text{(D)} \quad \left\{ \begin{array}{l} d = \operatorname{Max}_{\vec{p}} \left\{ - \iint\limits_G \Psi(\vec{x}, \vec{p}, \operatorname{div} \vec{p})\, dA + \oint\limits_\Gamma \chi(s)\, \vec{p} \cdot \vec{n}\, ds \right\} \\ \text{sous la condition } \operatorname{div} \vec{p} = F_v . \end{array} \right.$$

1.3. Considérons un problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson: $\Delta u = -\rho(\vec{x})$ dans G, $u = \chi(s)$ sur Γ (ρ et χ = fonctions données); posons

$$d = \oint\limits_\Gamma \chi(s) \frac{\partial u}{\partial n}\, ds - \frac{1}{2} D(u) = + \frac{1}{2} D(u) - \iint\limits_G \rho u\, dA ,$$

où $D(u)$ est l'intégrale de Dirichlet $\iint\limits_G \operatorname{grad}^2 u\, dA$; le principe de Dirichlet nous dit:

$$d = \operatorname{Min}_{v = \chi(s) \text{ sur } \Gamma} \left\{ \frac{1}{2} D(v) - \iint\limits_G \rho v\, dA \right\} . \tag{4}$$

On a donc ici

$$F(\vec{x}, v, \vec{q}) = \frac{1}{2} \vec{q}^{\,2} - \rho v \,; \quad \vec{p} = F_{\vec{q}} = \vec{q} \,; \quad \operatorname{div} \vec{p} = F_v = -\rho \,;$$

$$\Psi(\vec{x}, \vec{p}, \operatorname{div} \vec{p}) = \vec{q} \cdot \vec{p} + v \operatorname{div} \vec{p} - F = \frac{1}{2} \vec{p}^{\,2} \;;$$

d'où le principe dual:

$$(5) \qquad d = \operatorname{Max}_{\operatorname{div} \vec{p} = -\rho} \left\{ \oint_{\Gamma} \chi(s) \vec{p} \cdot \vec{n} \, ds - \frac{1}{2} \iint_{G} \vec{p}^{\,2} \, dA \right\},$$

qui n'est autre que le principe de Thomson (cf. [13]); le champ extrémal est $\vec{p} = \operatorname{grad} u$. Les champs vectoriels $\vec{p}$ concurrents satisfont l'équation différentielle, mais aucune condition aux limites.

1.4. Nous considérerons au § 2 une transformation variationnelle analogue (mais non involutive), reposant non plus sur une dissociation de v et grad v, mais bien sur une dissociation de la fonction v elle-même en *deux* fonctions f et g (le domaine G étant à *deux* dimensions). Au § 3, nous appliquerons cette transformation au problème considéré en 1.3 ci-dessus: elle fait correspondre au principe de Dirichlet un principe très voisin de celui de Thomson, mais restreignant les champs concurrents par des conditions aux limites; ce principe a été obtenu par la « méthode des problèmes auxiliaires unidimensionnels » [8, 7]. Au § 4, nous montrerons comment cette méthode s'applique également aux problèmes aux valeurs propres, et conduit, à partir du principe de Rayleigh, à un principe de Maximum pour λ_1 (la première valeur propre) déjà obtenu à l'aide de problèmes auxiliaires unidimensionnels [6, 7], inspirés par Payne-Weinberger [11]. Enfin, nous montrerons au § 5 qu'une forme essentiellement équivalente de ce principe de Maximum (mais plus proche du principe de Thomson), se rattachant à divers travaux dont quelques-uns déjà anciens [12, 1, 14, 15, 10, 7, 9, 4], peut être également obtenue en appliquant une transformation de Friedrichs à peine modifiée.

§ 2. La transformation variationnelle proposée

2.1. Nous partons de nouveau du problème (I) considéré en 1.2:

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} d = \operatorname{Min}_v J[v] \text{ sous la condition } v = \chi(s) \text{ sur } \Gamma\,, \\ \text{où } J[v] = \iint_G F(x, y, v, v_x, v_y)\, dA\,. \text{ \textit{Nous supposons} } F_{v_x v_y} = 0. \end{cases}$$

Dans cette expression, nous remplaçons v_x par f_x, v_y par g_y, et *arbitrairement* $v(x, y)$ tantôt par $f(x, y)$, tantôt par $g(x, y)$; nous obtenons une fonction $\tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y)$ telle que

$$(6) \qquad \tilde{F}(x, y, v, v, v_x, v_y) \equiv F(x, y, v, v_x, v_y);$$

$f(x, y)$ est supposée continue *en* x, ainsi que sa dérivée partielle f_x; $g(x, y)$ continue *en* y, ainsi que g_y; on suppose l'existence de f_{xx} et g_{yy}.

Remarque, importante pour les applications: On n'exigera *pas* que les fonctions f et g soient continues !

Posons

$$\tilde{J}[f, g] = \iint_G \tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y)\, dA;$$

$\tilde{J}[v, v] = J[v]$, nous avons donc:

$$d = \mathrm{Min}_{f,g}\, \tilde{J}[f, g]$$

sous les conditions $f \equiv g$ dans G et $f = g = \chi(s)$ sur Γ.

2.2. Introduisons un « multiplicateur de Lagrange » $\lambda(x, y)$; je définis

$$(7) \qquad d[\lambda] = \mathrm{Min}_{\left\{\substack{f,\, g \\ f = g = \chi(s) \text{ sur } \Gamma}\right.} \tilde{J}[f, g; \lambda],$$

$$\text{où } \tilde{J}[f, g; \lambda] = \tilde{J}[f, g] + \iint_G \lambda \cdot (f - g)\, dA$$

(donc $\tilde{J}[f, g; 0] = \tilde{J}[f, g]$), et je fais les deux *hypothèses* suivantes:

(a) Ce Minimum variationnel existe pour toutes les fonctions $\lambda(x, y)$ de la classe considérée;

(b) La paire de fonctions $\{f, g\}$ (dépendant de λ) qui réalise ce Minimum, est univoquement déterminée par les conditions d'Euler

$$(8) \qquad \begin{cases} 0 = [\tilde{F} + \lambda(f - g)]_f = [\tilde{F}]_f + \lambda(x, y) = \tilde{F}_f - \dfrac{d}{dx}\tilde{F}_{f_x} + \lambda \\[2ex] 0 = [\tilde{F} + \lambda(f - g)]_g = [\tilde{F}]_g - \lambda(x, y) = \tilde{F}_g - \dfrac{d}{dy}\tilde{F}_{g_y} - \lambda \end{cases}$$

et la condition imposée $f = g = \chi(s)$ sur Γ.

Quelle que soit $\lambda(x, y)$ (dans la classe considérée), on a

$$d[\lambda] \leqq d, \tag{9}$$

car

$$d = \operatorname{Min}_{\left\{\substack{f,\,g \\ f=g=\chi(s) \text{ sur } \Gamma}\right.} \tilde{J}[f, g; \lambda]$$

sous la condition supplémentaire f $\equiv$ g.

2.3. La solution $u(x, y)$ du problème de variation initial (I) satisfait l'équation d'Euler correspondante

$$0 = [F]_u = F_u - \frac{d}{dx} F_{u_x} - \frac{d}{dy} F_{u_y};$$

la paire de fonctions $\{f, g\} = \{u, u\}$ satisfait donc

$$0 = [\tilde{F}]_f + [\tilde{F}]_g;$$

si donc, dans le problème de variation (7) définissant $d[\lambda]$, nous posons

$$\lambda(x, y) = -[\tilde{F}]_f\big|_{f \equiv u},$$

alors la paire de fonctions $\{u, u\}$ satisfait les deux équations d'Euler (8); par l'unicité que nous avons postulée, elle réalise donc le Minimum

$$d[\lambda = -[\tilde{F}]_f\big|_{f \equiv u}];$$

celui-ci vaut donc $J[u] = d$. *Sous les hypothèses* (a) *et* (b) ci-dessus, nous avons donc par (9):

$$d = \operatorname{Max}_{\lambda(x, y)} d[\lambda(x, y)]. \tag{10}$$

Le raisonnement qui précède est calqué sur celui de Friedrichs, cf. [5] et [2].

2.4. Au lieu de choisir le « multiplicateur de Lagrange » $\lambda(x, y)$, on peut également choisir une paire de fonctions $\{f(x, y), g(x, y)\}$ *satisfaisant la condition*

$$[\tilde{F}]_f + [\tilde{F}]_g \equiv \tilde{F}_f + \tilde{F}_g - \frac{d}{dx} \tilde{F}_{f_x} - \frac{d}{dy} \tilde{F}_{g_y} = 0; \tag{11}$$

on doit alors prendre $\lambda(x, y) = -[\tilde{F}]_f = +[\tilde{F}]_g$.

Pour toute paire $\{ f(x,y),\ g(x,y) \}$ satisfaisant (11), on a

$$d[-[\tilde{F}]_f] = \tilde{J}[f,g;\ -[\tilde{F}]_f] = \tilde{J}[f,g] - \iint_G ([\tilde{F}]_f f + [\tilde{F}]_g g)\, dA\ ,$$

d'où par (10):

$$d = \operatorname{Max}_{f,g} \{ \tilde{J}[f,g] - \iint_G ([\tilde{F}]_f f + [\tilde{F}]_g g)\, dA \} \tag{12}$$

sous les conditions (11) et

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x,y) \text{ continue } \textit{en } x\text{, ainsi que } f_x\ ;\ f_{xx} \text{ existe;} \\ g(x,y) \text{ continue } \textit{en } y\text{, ainsi que } g_y\ ;\ g_{yy} \text{ existe;} \\ f = g = \chi(s) \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right. \tag{13}$$

2.5. *Remarque.* — Il nous reste une liberté: la manière (arbitraire) dont nous remplaçons φ par f ou par g dans F, sous la condition (6). Même si φ n'apparaît pas explicitement dans F, nous sommes libres d'ajouter, dans $\tilde{F}$, des expressions s'annulant lorsque $f \equiv g$. En particulier, si nous remplaçons $\tilde{F}$ par $\tilde{F} + v\,.\,(f - g)$ avec $v(x,y)$ arbitraire, $\tilde{J}[f,g]$ devient $\tilde{J}[f,g] + \iint_G v\,.\,(f-g)\, dA = \tilde{J}[f,g;\, v]$. Cela nous montre que, si nous réservons notre liberté dans la construction de $\tilde{F}$, le choix $\lambda(x,y) \equiv 0$ ne signifie pas une restriction. La condition (11) devient alors

$$[\tilde{F}]_f = [\tilde{F}]_g = 0\ ; \tag{11*}$$

donc

$$d = \operatorname{Max}_{\left\{ \substack{\text{construction de } \tilde{F} \text{ satisfaisant (6)} \\ \text{choix de } f \text{ et } g \text{ satisfaisant (11*) et (13)}} \right.} \tilde{J}[f,g]\ . \tag{12*}$$

§ 3. Application aux problèmes aux limites

Reprenons le problème considéré en 1.3. Le principe variationnel (I) est celui de Dirichlet (4): $F(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) = \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) - \rho v$; je pose *(par exemple !)* $\tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y) = \frac{1}{2}(f_x^2 + g_y^2) - \rho f$; la condition (6) est satisfaite; la condition (11) est ici:

$$f_{xx} + g_{yy} = -\rho(x,y)\ . \tag{11'}$$

Nos hypothèses *(a)* et *(b)* sont satisfaites: $\lambda(x, y)$ étant choisie, f est déterminée par $f_{xx} = \lambda - \rho$ dans G et $f = \chi(s)$ sur Γ; g est déterminée par $g_{yy} = -\lambda$ dans G et $g = \chi(s)$ sur Γ: *ce sont les « problèmes auxiliaires unidimensionnels ».* — Nous avons alors

$$\tilde{J}[f, g] - \iint_G ([\tilde{F}]_f f + [\tilde{F}]_g g)\, dA$$

$$= \iint_G \left[\frac{1}{2}(f_x^2 + g_y^2) - \rho f + \rho f + f f_{xx} + g g_{yy}\right] dA$$

$$= \oint_\Gamma \chi(s)\left(f_x \frac{\partial x}{\partial n} + g_y \frac{\partial y}{\partial n}\right) ds - \frac{1}{2}\iint_G (f_x^2 + g_y^2)\, dA\, ;$$

d'où par (12):

$$(12') \quad d = \operatorname{Max}_{\left\{\substack{f,\, g \text{ satisfaisant} \\ (13) \text{ et } (11')}\right.} \left[\oint_\Gamma \chi(s)\left(f_x \frac{\partial x}{\partial n} + g_y \frac{\partial y}{\partial n}\right) ds - \frac{1}{2}\iint_G (f_x^2 + g_y^2)\, dA\right].$$

Ceci est précisément le principe de Thomson (5), restreint aux champs particuliers $\vec{p} = (f_x, g_y)$ avec $f = g = \chi(s)$ sur Γ. Ces champs concurrents, qui tiennent compte des conditions aux limites, sont « les meilleurs »: il est en effet facile [7, 8] de montrer que, si $p_{1_x} = f_{xx}$ et $p_{2_y} = g_{yy}$, la borne (12′) fournie par le champ (f_x, g_y) est plus précise que (ou égale à) celle (5) fournie par $\vec{p}$. (12′) a été obtenue auparavant [7, 8] par la considération de problèmes auxiliaires unidimensionnels, et admet une interprétation physique simple (à l'aide du principe du Minimum de l'énergie potentielle).

Remarque. — On peut obtenir le même résultat (12′) en utilisant (12*) au lieu de (12): on choisit alors arbitrairement $\rho_1(x, y)$ et l'on pose $\tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y) = \frac{1}{2}(f_x^2 + g_y^2) - \rho_1 f - (\rho - \rho_1) g$; nos hypothèses sont de nouveau satisfaites: f est déterminée par $f = \chi(s)$ sur Γ et l'équation d'Euler $0 = [\tilde{F}]_f = -\rho_1 - f_{xx}$; g est déterminée par $g = \chi(s)$ sur Γ et $0 = [\tilde{F}]_g = -(\rho - \rho_1) - g_{yy}$; sous la condition (11′), nous avons alors par (12*), en introduisant $\rho_1 = -f_{xx}$ et $\rho - \rho_1 = -g_{yy}$, $d \geqq \tilde{J}[f, g] = \iint_G [\frac{1}{2}(f_x^2 + g_y^2) + f f_{xx} + g g_{yy}]\, dA$ comme ci-dessus, d'où (12′).

§ 4. Application d'un raisonnement analogue aux problèmes aux valeurs propres

Comme exemple-type, je considère le problème de la vibration fondamentale d'une membrane couvrant un domaine G du plan et fixée sur le contour Γ: on cherche $u_1(x, y)$ et un nombre λ_1 tels que $\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 = 0$ et $u_1 > 0$ dans G, et $u_1 = 0$ sur Γ. Le principe de Rayleigh dit:

$$\lambda_1 = \operatorname{Min}_{v=0 \text{ sur } \Gamma} \left\{ \frac{D(v)}{\iint\limits_G v^2\, dA} \right\} .$$

On peut aussi l'énoncer ainsi:

$$\text{(14)} \quad \lambda_1 = \max k \text{ sous la condition: } \underset{v=0 \text{ sur } \Gamma}{\forall} \; D(v) - k \iint\limits_G v^2\, dA \geqq 0 .$$

Nous posons ici

$$\tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y) \equiv f_x^2 + g_y^2 - k\left[\mu f^2 + (1-\mu) g^2\right] ,$$

où $\mu(x, y)$ est une fonction arbitraire dans G; la condition (6) est alors satisfaite. Nous avons maintenant, quelle que soit $\mu(x, y)$, $\lambda_1 \geqq \max k$ sous la condition $\underset{\substack{f,\, g \text{ satisfaisant } (13) \\ \text{avec } \chi(s) \equiv 0}}{\forall} \iint\limits_G \tilde{F}\, dA \geqq 0$.
En effet, si l'on restreint f et g par $f \equiv g$, alors on retrouve pour k la condition (14); ici la classe des k admissibles a été restreinte, donc max k est devenu plus petit.

Maintenons fixes le nombre k et la fonction $\mu(x, y)$, et cherchons les paires $\{\hat{f}, \hat{g}\}$ qui rendent stationnaire l'intégrale: nous avons les deux équations d'Euler

$$0 = -\tfrac{1}{2}[\tilde{F}]_f = \hat{f}_{xx} + k\mu\hat{f} ; \qquad 0 = -\tfrac{1}{2}[\tilde{F}]_g = \hat{g}_{yy} + k(1-\mu)\hat{g} .$$

Supposons (c'est essentiel ici !) $\hat{f} > 0$ *et* $\hat{g} > 0$ *dans* G. Eliminons μ: les fonctions $\hat{f}$ et $\hat{g}$ satisfont

$$\text{(15)} \qquad -\frac{\hat{f}_{xx}}{\hat{f}} - \frac{\hat{g}_{yy}}{\hat{g}} = k = \text{const.}$$

Réciproquement, si nous avons choisi une paire de fonctions $\{\hat{f}, \hat{g}\}$ satisfaisant (15) avec $k > 0$, posons $\mu(x, y) = -(1/k)$ $(\hat{f}_{xx}/\hat{f})$; alors $1 - \mu = -(1/k)\,(\hat{g}_{yy}/\hat{g})$; les équations d'Euler relatives à μ sont alors satisfaites par $\hat{f}$ et $\hat{g}$. Pour f et g ($= 0$ sur Γ) quelconques, nous vérifions

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
\iint_G \tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y)\, dA &= \iint_G \left[f_x^2 + g_y^2 + \frac{\hat{f}_{xx}}{\hat{f}} f^2 + \frac{\hat{g}_{yy}}{\hat{g}} g^2 \right] dA \\
&= \iint_G \left[\left(f_x - \frac{\hat{f}_x}{\hat{f}} f \right)^2 + \left(g_y - \frac{\hat{g}_y}{\hat{g}} g \right)^2 \right] dA \geqq 0 ,
\end{aligned}
\right.
$$

donc $\lambda_1 \geqq k$; on a l'égalité en choisissant $\hat{f} = \hat{g} = u_1(x, y)$, d'où

$$
(17)\qquad \lambda_1 = \operatorname{Max}_{\left\{\substack{\hat{f},\, \hat{g} > 0 \text{ dans } G \text{ satisfaisant} \\ (15) \text{ et } (13) \text{ avec } \chi(s) \equiv 0}\right.} \left(- \frac{\hat{f}_{xx}}{\hat{f}} - \frac{\hat{g}_{yy}}{\hat{g}} \right) .
$$

C'est une spécialisation du principe de Maximum plus général [7]:

$$
(18)\qquad \lambda_1 = \operatorname{Max}_{\left\{\substack{f,\, g > 0 \text{ dans } G \\ f_{xx} \text{ et } g_{yy} \text{ existent}}\right.} \inf_G \left(- \frac{f_{xx}}{f} - \frac{g_{yy}}{g} \right) ;
$$

mais les paires de fonctions plus particulières $\{\hat{f}, \hat{g}\}$ sont « les meilleures ».

§ 5. La transformation de Friedrichs conduit à une autre forme du même principe

Considérons de nouveau le principe de Rayleigh sous la forme (14); remarquons que la fonction propre $u_1(x, y)$ n'est déterminée qu'à un facteur constant près, il en est donc de même de grad u_1; tandis que le champ vectoriel grad u_1/u_1 est uniquement déterminé. C'est pourquoi, opérant presque comme Friedrichs (cf. 1.2), nous remplaçons — grad v/v par $\vec{q}$, c'est-à-dire — grad v par $v\vec{q}$ dans (14). $\lambda_1 \geqq \max k$ sous la condition

$$
\underset{\substack{v,\, \vec{q} \\ v = 0 \text{ sur } \Gamma}}{\forall} \iint_G [v^2 \vec{q}^{\,2} - kv^2 - 2v\vec{p} \cdot (\operatorname{grad} v + v\vec{q})]\, dA \geqq 0 ,
$$

quel que soit le champ $\vec{p}$ (« multiplicateur de Lagrange »); en effet, si l'on restreint la paire $\{ v, \vec{q} \}$ par $\vec{q} = -\operatorname{grad} v/v$, on retrouve la condition (14).

Gardons $\vec{p}$ fixe et cherchons à minimaliser l'intégrale en variant v et $\vec{q}$; nous obtenons les deux équations d'Euler suivantes pour un champ « extrémal » $\hat{\vec{q}}$:

$$0 = v^2 \hat{\vec{q}} - v^2 \vec{p}, \quad \text{d'où} \quad \hat{\vec{q}} = \vec{p} ;$$

$$0 = v \hat{\vec{q}}^2 - kv - 2\vec{p} \cdot \hat{\vec{q}} v - \vec{p} \cdot \operatorname{grad} v + \operatorname{div}(v\vec{p}) = v \cdot (\operatorname{div} \hat{\vec{q}} - \hat{\vec{q}}^2 - k) ;$$

donc

$$\text{(15')} \qquad \operatorname{div} \hat{\vec{q}} - \hat{\vec{q}}^2 = k ;$$

v quelconque, $= 0$ sur Γ.

Si nous avons construit un tel champ vectoriel $\hat{\vec{q}}$ dans G, v et $\hat{\vec{q}}$ satisferont les équations d'Euler correspondant au choix $\vec{p} = \hat{\vec{q}}$. L'intégrale devient alors, pour v et $\vec{q}$ quelconques,

$$\text{(16')} \qquad \iint_G [(\vec{q}^2 - 2\vec{q} \cdot \hat{\vec{q}} - k)v^2 - \hat{\vec{q}} \cdot \operatorname{grad}(v^2)]\, dA$$

$$= \iint_G [(\vec{q} - \hat{\vec{q}})^2 + \operatorname{div} \hat{\vec{q}} - \hat{\vec{q}}^2 - k] v^2 \, dA \geqq 0 ,$$

donc $\lambda_1 \geqq k$; on a l'égalité en choisissant $\hat{\vec{q}} = -\operatorname{grad} u_1/u_1$, d'où

$$\text{(17')} \qquad \lambda_1 = \operatorname{Max}_{\hat{\vec{q}}\,;\ \operatorname{div} \hat{\vec{q}} - \hat{\vec{q}}^2 = \text{const}} \left(\operatorname{div} \hat{\vec{q}} - \hat{\vec{q}}^2\right).$$

C'est une spécialisation du principe de Maximum (cf. [12, 1, 14, 15, 10, 7, 9, 4]):

$$\text{(18')} \qquad \lambda_1 = \operatorname{Max}_{\vec{q}} \inf_G (\operatorname{div} \vec{q} - \vec{q}^2) ;$$

nous voyons en effet que l'inégalité (16′) reste satisfaite pourvu que $\operatorname{div} \hat{\vec{q}} - \hat{\vec{q}}^2 - k \geqq 0$ dans tout G.

Remarques. — *(a)* Le principe (18′) est essentiellement équivalent à (18): considérer le champ $\vec{q} = (-f_x/f, -g_y/g)$.

(b) Il n'y a pas lieu d'exiger la continuité des champs $\vec{q}$ ou $\hat{\vec{q}}$: il suffit que q_1 soit continue *en* x, q_2 continue *en* y, et que les dérivées partielles q_{1_x} et q_{2_y} existent; la même remarque s'applique aux champs $\vec{p}$ concurrents pour le principe de Thomson.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Boggio, Sull' equazione del moto vibratorio delle membrane elastiche. *Atti Accad. Lincei*, ser. 5, *16* (2° sem.), 1907, pp. 386-393.

[2] R. Courant & D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, vol. 1 (Springer, Berlin, 1931).

[3] J. B. Diaz, Upper and lower bounds for quadratic functionals. *Seminario matemático de Barcelona*, Collectanea Math., *4*, 1951, pp. 1-50.

[4] G. Fichera & M. Picone, Calcolo per difetto del più basso autovalore di un operatore ellittico del secondo ordine. *Atti Accad. Lincei*, Rend., ser. 8, *30*, 1961, pp. 411-418.

[5] K. O. Friedrichs, Ein Verfahren der Variationsrechnung, das Minimum eines Integrals als das Maximum eines anderen Ausdruckes darzustellen. *Nachrichten Göttingen*, 1929, pp. 13-20.

[6] J. Hersch, Un principe de maximum pour la fréquence fondamentale d'une membrane. *C. R. Acad. Sci. Paris*, *249*, 1959, p. 1074.

[7] —— Sur la fréquence fondamentale d'une membrane vibrante: évaluations par défaut et principe de maximum. *ZAMP*, *11*, 1960, pp. 387-413.

[8] —— Le principe de Thomson comme corollaire de celui de Dirichlet. *L'Enseignement math.*, 2e série, *6*, 1960, p. 152.

[9] —— Physical interpretation and strengthening of M. H. Protter's method for vibrating nonhomogeneous membranes; its analogue for Schrödinger's equation. *Pacific J. Math.*, *11*, 1961, pp. 971-980.

[10] W. W. Hooker, *Lower bounds for the first eigenvalue of elliptic equations of orders two and four.* Dissertation, Univ. of California, Berkeley, 1960.

[11] L. E. Payne & H. F. Weinberger, Lower bounds for vibration frequencies of elastically supported membranes and plates. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, *5*, 1957, pp. 171-182.

[12] E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. 2 (1re éd.: 1893), pp. 25-26.

[13] G. Pólya & G. Szegö, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics.* Princeton University Press, 1951.

[14] M. H. Protter, Vibration of a nonhomogeneous membrane. *Pacific J. Math.*, *9*, 1959, pp. 1249-55.

[15] —— Lower bounds for the first eigenvalue of elliptic equations. *Ann. of Math.*, *71*, 1960, pp. 423-444.

Remarque finale. — Il y a lieu d'indiquer également les travaux de M. G. Slobodianski, très proches à la fois de la transformation de Friedrichs et de celle que nous décrivons ici: voir à ce sujet le livre de S. G. Michlin: *Variationsmethoden der mathematischen Physik* (Akademie-Verlag, Berlin, 1962), pp. 300 ss.

(reçu le 15 mars 1964)

Prof. J. Hersch
E.P.F.
Zürich