

# § 1. Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# UNE TRANSFORMATION VARIATIONNELLE APPARENTÉE A CELLE DE FRIEDRICHS, CONDUISANT A LA MÉTHODE DES PROBLÈMES AUXILIAIRES UNIDIMENSIONNELS

par Joseph HERSCH

## § 1. Introduction

1.1. K. O. FRIEDRICHS ([5]; voir aussi [2], pp. 201-9) a découvert en 1929 une transformation variationnelle involutive, faisant passer d'un principe de Minimum caractérisant une grandeur  $d$  à un principe de Maximum « dual », caractérisant la même grandeur  $d$ . — L'intérêt numérique de cette double caractérisation est évident: si (comme c'est généralement le cas) la grandeur  $d$  ne peut être déterminée exactement, le premier principe permettra de l'évaluer par excès, le second de l'évaluer par défaut. — L'intérêt théorique est considérable: il réside surtout dans la dualité elle-même; mais aussi dans le fait que, appliquée à un problème aux limites, la transformation de Friedrichs fait passer du principe de Dirichlet au principe de Thomson (à propos de ces principes: cf. [13, 3]). — L'idée de base est très simple: si, dans un principe de Minimum, on élargit la classe des fonctions admises à concurrence, le Minimum diminue (ou reste inchangé).

1.2. Les raisonnements qui suivent s'appliquent à un nombre fini quelconque de dimensions; pour fixer les idées, nous considérons un domaine régulier  $G$  du plan, de contour  $\Gamma$ , et, dans  $G$ , un problème de variation initial (I) du type:

$$(I) \quad \begin{cases} d = \text{Min}_v \iint_G F(\vec{x}, v, \text{grad } v) dA, \\ \text{sous la condition: } v = \chi(s) \text{ donnée sur } \Gamma; \end{cases}$$

$\vec{x}$  désigne le rayon vecteur  $(x, y)$ ,  $dA = dx dy$  est l'élément d'aire,  $s$  mesure l'arc sur la courbe  $\Gamma$ .

La transformation de Friedrichs consiste à « dissocier »  $\nu$  de grad  $\nu$  dans l'intégrale ci-dessus: on y remplace grad  $\nu$  par un champ vectoriel  $\vec{q}$  (alors on a  $F(\vec{x}, \nu, \vec{q})$ ), et l'on traite les conditions auxiliaires  $\vec{q} - \text{grad } \nu = \vec{0}$  dans  $G$  et  $\nu - \chi(s) = 0$  sur  $\Gamma$  à l'aide de multiplicateurs de Lagrange  $\vec{p}(\vec{x})$  et  $\mu(s)$  respectivement;  $\nu$  et  $\vec{q}$  varient désormais indépendamment. On obtient ainsi un « problème libre »; on passe ensuite de celui-ci au « problème dual » (D) en imposant à priori les conditions naturelles suivantes du problème libre:

- (1)  $F_{\vec{q}} = \vec{p}$  (c'est-à-dire:  $F_{q_i} = p_i$ ), et  $F_\nu = \text{div } \vec{p}$  dans  $G$ ;  
 (2)  $\vec{p} \cdot \vec{n} = \mu(s)$  sur  $\Gamma$  ( $\vec{n}$  = normale extérieure).

On postule en général que, à l'aide des conditions (1), on puisse tirer  $\nu$  et  $\vec{q}$  en fonction de  $\vec{x}$ ,  $\vec{p}$  et  $\text{div } \vec{p}$ . On pose alors (transformation de Legendre)

$$(3) \quad \Psi(\vec{x}, \vec{p}, \text{div } \vec{p}) = \vec{q} \cdot \vec{p} + \nu \text{div } \vec{p} - F(\vec{x}, \nu, \vec{q})$$

et l'on obtient le problème dual:

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} d = \text{Max}_{\vec{p}} \left\{ - \iint_G \Psi(\vec{x}, \vec{p}, \text{div } \vec{p}) dA + \oint_\Gamma \chi(s) \vec{p} \cdot \vec{n} ds \right\} \\ \text{sous la condition } \text{div } \vec{p} = F_\nu. \end{array} \right.$$

1.3. Considérons un problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson:  $\Delta u = -\rho(\vec{x})$  dans  $G$ ,  $u = \chi(s)$  sur  $\Gamma$  ( $\rho$  et  $\chi$  = fonctions données); posons

$$d = \oint_\Gamma \chi(s) \frac{\partial u}{\partial n} ds - \frac{1}{2} D(u) = + \frac{1}{2} D(u) - \iint_G \rho u dA,$$

où  $D(u)$  est l'intégrale de Dirichlet  $\iint_G \text{grad}^2 u dA$ ; le principe de Dirichlet nous dit:

$$(4) \quad d = \text{Min}_{v=\chi(s) \text{ sur } \Gamma} \left\{ \frac{1}{2} D(v) - \iint_G \rho v dA \right\}.$$

On a donc ici

$$F(\vec{x}, \nu, \vec{q}) = \frac{1}{2} \vec{q}^2 - \rho \nu; \quad \vec{p} = F_{\vec{q}} = \vec{q}; \quad \text{div } \vec{p} = F_\nu = -\rho;$$

$$\Psi(\vec{x}, \vec{p}, \operatorname{div} \vec{p}) = \vec{q} \cdot \vec{p} + v \operatorname{div} \vec{p} - F = \frac{1}{2} \vec{p}^2 ;$$

d'où le principe dual:

$$(5) \quad d = \operatorname{Max}_{\operatorname{div} \vec{p} = -\rho} \left\{ \oint_{\Gamma} \chi(s) \vec{p} \cdot \vec{n} \, ds - \frac{1}{2} \iint_G \vec{p}^2 \, dA \right\},$$

qui n'est autre que le principe de Thomson (cf. [13]); le champ extrémal est  $\vec{p} = \operatorname{grad} u$ . Les champs vectoriels  $\vec{p}$  concurrents satisfont l'équation différentielle, mais aucune condition aux limites.

1.4. Nous considérerons au § 2 une transformation variationnelle analogue (mais non involutive), reposant non plus sur une dissociation de  $\rho$  et  $\operatorname{grad} \rho$ , mais bien sur une dissociation de la fonction  $\rho$  elle-même en *deux* fonctions  $f$  et  $g$  (le domaine  $G$  étant à *deux* dimensions). Au § 3, nous appliquerons cette transformation au problème considéré en 1.3 ci-dessus: elle fait correspondre au principe de Dirichlet un principe très voisin de celui de Thomson, mais restreignant les champs concurrents par des conditions aux limites; ce principe a été obtenu par la « méthode des problèmes auxiliaires unidimensionnels » [8, 7]. Au § 4, nous montrerons comment cette méthode s'applique également aux problèmes aux valeurs propres, et conduit, à partir du principe de Rayleigh, à un principe de Maximum pour  $\lambda_1$  (la première valeur propre) déjà obtenu à l'aide de problèmes auxiliaires unidimensionnels [6, 7], inspirés par PAYNE-WEINBERGER [11]. Enfin, nous montrerons au § 5 qu'une forme essentiellement équivalente de ce principe de Maximum (mais plus proche du principe de Thomson), se rattachant à divers travaux dont quelques-uns déjà anciens [12, 1, 14, 15, 10, 7, 9, 4], peut être également obtenue en appliquant une transformation de Friedrichs à peine modifiée.

## § 2. La transformation variationnelle proposée

2.1. Nous partons de nouveau du problème (I) considéré en 1.2:

$$(I) \quad \begin{cases} d = \operatorname{Min}_v J[v] \text{ sous la condition } v = \chi(s) \text{ sur } \Gamma, \\ \text{où } J[v] = \iint_G F(x, y, v, v_x, v_y) \, dA. \text{ Nous supposons } F_{v_x v_y} = 0. \end{cases}$$