§ 4. Application d'un raisonnement analogue aux problèmes aux valeurs propres

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

§ 4. Application d'un raisonnement analogue aux problèmes aux valeurs propres

Comme exemple-type, je considère le problème de la vibration fondamentale d'une membrane couvrant un domaine G du plan et fixée sur le contour Γ: on cherche $u_1(x, y)$ et un nombre λ_1 tels que $\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 = 0$ et $u_1 > 0$ dans G, et $u_1 = 0$ sur Γ. Le principe de Rayleigh dit:

$$\lambda_1 = \operatorname{Min}_{v=0 \text{ sur } \Gamma} \left\{ \frac{D(v)}{\iint\limits_G v^2 \, dA} \right\} .$$

On peut aussi l'énoncer ainsi:

$$(14) \quad \lambda_1 = \max k \text{ sous la condition: } \underset{v=0 \text{ sur } \Gamma}{\forall} \; D(v) - k \iint\limits_G v^2 \, dA \geqq 0 .$$

Nous posons ici

$$\tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y) \equiv f_x^2 + g_y^2 - k\,[\mu f^2 + (1-\mu)\, g^2] ,$$

où $\mu(x, y)$ est une fonction arbitraire dans G; la condition (6) est alors satisfaite. Nous avons maintenant, quelle que soit $\mu(x, y)$, $\lambda_1 \geqq \max k$ sous la condition $\underset{\substack{f,\, g \text{ satisfaisant (13)} \\ \text{avec } \chi(s) \equiv 0}}{\forall} \iint\limits_G \tilde{F}\, dA \geqq 0$.
En effet, si l'on restreint f et g par $f \equiv g$, alors on retrouve pour k la condition (14); ici la classe des k admissibles a été restreinte, donc max k est devenu plus petit.

Maintenons fixes le nombre k et la fonction $\mu(x, y)$, et cherchons les paires $\{\hat{f}, \hat{g}\}$ qui rendent stationnaire l'intégrale: nous avons les deux équations d'Euler

$$0 = -\tfrac{1}{2}[\tilde{F}]_f = \hat{f}_{xx} + k\mu\hat{f}; \qquad 0 = -\tfrac{1}{2}[\tilde{F}]_g = \hat{g}_{yy} + k(1-\mu)\,\hat{g} .$$

Supposons (c'est essentiel ici !) $\hat{f} > 0$ *et* $\hat{g} > 0$ *dans* G. Eliminons μ: les fonctions $\hat{f}$ et $\hat{g}$ satisfont

$$(15) \qquad -\frac{\hat{f}_{xx}}{\hat{f}} - \frac{\hat{g}_{yy}}{\hat{g}} = k = \text{const.}$$

Réciproquement, si nous avons choisi une paire de fonctions $\{\hat{f}, \hat{g}\}$ satisfaisant (15) avec $k > 0$, posons $\mu(x, y) = -(1/k)$ $(\hat{f}_{xx}/\hat{f})$; alors $1 - \mu = -(1/k)\,(\hat{g}_{yy}/\hat{g})$; les équations d'Euler relatives à μ sont alors satisfaites par $\hat{f}$ et $\hat{g}$. Pour f et g ($= 0$ sur Γ) quelconques, nous vérifions

$$(16)\quad \begin{cases} \displaystyle\iint_G \tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y)\, dA = \iint_G \left[f_x^2 + g_y^2 + \frac{\hat{f}_{xx}}{\hat{f}} f^2 + \frac{\hat{g}_{yy}}{\hat{g}} g^2 \right] dA \\ \displaystyle\qquad = \iint_G \left[\left(f_x - \frac{\hat{f}_x}{\hat{f}} f \right)^2 + \left(g_y - \frac{\hat{g}_y}{\hat{g}} g \right)^2 \right] dA \geqq 0, \end{cases}$$

donc $\lambda_1 \geqq k$; on a l'égalité en choisissant $\hat{f} = \hat{g} = u_1(x, y)$, d'où

$$(17)\qquad \lambda_1 = \mathrm{Max}_{\left\{\substack{\hat{f},\, \hat{g} > 0 \text{ dans } G \text{ satisfaisant} \\ (15) \text{ et } (13) \text{ avec } \chi(s) \equiv 0}\right.} \left(-\frac{\hat{f}_{xx}}{\hat{f}} - \frac{\hat{g}_{yy}}{\hat{g}} \right).$$

C'est une spécialisation du principe de Maximum plus général [7]:

$$(18)\qquad \lambda_1 = \mathrm{Max}_{\left\{\substack{f,\, g > 0 \text{ dans } G \\ f_{xx} \text{ et } g_{yy} \text{ existent}}\right.} \inf_G \left(-\frac{f_{xx}}{f} - \frac{g_{yy}}{g} \right);$$

mais les paires de fonctions plus particulières $\{\hat{f}, \hat{g}\}$ sont « les meilleures ».

§ 5. La transformation de Friedrichs conduit à une autre forme du même principe

Considérons de nouveau le principe de Rayleigh sous la forme (14); remarquons que la fonction propre $u_1(x, y)$ n'est déterminée qu'à un facteur constant près, il en est donc de même de grad u_1; tandis que le champ vectoriel grad u_1/u_1 est uniquement déterminé. C'est pourquoi, opérant presque comme Friedrichs (cf. 1.2), nous remplaçons — grad v/v par $\vec{q}$, c'est-à-dire — grad v par $v\vec{q}$ dans (14). $\lambda_1 \geqq \max k$ sous la condition

$$\forall_{\substack{v,\, \vec{q} \\ v = 0 \text{ sur } \Gamma}} \iint_G [v^2 \vec{q}^{\,2} - kv^2 - 2v\vec{p} \cdot (\mathrm{grad}\, v + v\vec{q})]\, dA \geqq 0,$$