

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 11 (1965)  
**Heft:** 2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE TRANSFORMATION VARIATIONNELLE APPARENTÉE A  
CELLE DE FRIEDRICH'S, CONDUISANT A LA MÉTHODE DES  
PROBLÈMES AUXILIAIRES UNIDIMENSIONNELS

**Autor:** Hersch, Joseph  
**Kapitel:** § 5. La transformation de Friedrichs conduit à une autre forme du  
même principe  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-39972>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 12.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Réciproquement, si nous avons choisi une paire de fonctions  $\{\hat{f}, \hat{g}\}$  satisfaisant (15) avec  $k > 0$ , posons  $\mu(x, y) = -(1/k)(\hat{f}_{xx}/\hat{f})$ ; alors  $1 - \mu = -(1/k)(\hat{g}_{yy}/\hat{g})$ ; les équations d'Euler relatives à  $\mu$  sont alors satisfaites par  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$ . Pour  $f$  et  $g$  ( $= 0$  sur  $\Gamma$ ) quelconques, nous vérifions

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \iint_G \tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y) dA &= \iint_G \left[ f_x^2 + g_y^2 + \frac{\hat{f}_{xx}}{\hat{f}} f^2 + \frac{\hat{g}_{yy}}{\hat{g}} g^2 \right] dA \\ &= \iint_G \left[ \left( f_x - \frac{\hat{f}_x}{\hat{f}} f \right)^2 + \left( g_y - \frac{\hat{g}_y}{\hat{g}} g \right)^2 \right] dA \geq 0, \end{aligned} \right.$$

donc  $\lambda_1 \geq k$ ; on a l'égalité en choisissant  $\hat{f} = \hat{g} = u_1(x, y)$ , d'où

$$(17) \quad \lambda_1 = \text{Max}_{\substack{\{\hat{f}, \hat{g} > 0 \text{ dans } G \text{ satisfaisant} \\ (15) \text{ et } (13) \text{ avec } \chi(s) \equiv 0}} \left( -\frac{\hat{f}_{xx}}{\hat{f}} - \frac{\hat{g}_{yy}}{\hat{g}} \right).$$

C'est une spécialisation du principe de Maximum plus général [7]:

$$(18) \quad \lambda_1 = \text{Max}_{\substack{\{f, g > 0 \text{ dans } G \\ f_{xx} \text{ et } g_{yy} \text{ existent}}} \inf_G \left( -\frac{f_{xx}}{f} - \frac{g_{yy}}{g} \right);$$

mais les paires de fonctions plus particulières  $\{\hat{f}, \hat{g}\}$  sont « les meilleures ».

### § 5. La transformation de Friedrichs conduit à une autre forme du même principe

Considérons de nouveau le principe de Rayleigh sous la forme (14); remarquons que la fonction propre  $u_1(x, y)$  n'est déterminée qu'à un facteur constant près, il en est donc de même de  $\text{grad } u_1$ ; tandis que le champ vectoriel  $\text{grad } u_1/u_1$  est uniquement déterminé. C'est pourquoi, opérant presque comme Friedrichs (cf. 1.2), nous remplaçons  $-\text{grad } v/v$  par  $\vec{q}$ , c'est-à-dire  $-\text{grad } v$  par  $v\vec{q}$  dans (14).  $\lambda_1 \geq \max k$  sous la condition

$$\underset{v=0 \text{ sur } \Gamma}{\text{Min}}_{\vec{q}} \iint_G [v^2 \vec{q}^2 - kv^2 - 2v\vec{p} \cdot (\text{grad } v + v\vec{q})] dA \geq 0,$$

quel que soit le champ  $\vec{p}$  (« multiplicateur de Lagrange »); en effet, si l'on restreint la paire  $\{v, \vec{q}\}$  par  $\vec{q} = -\text{grad } v/v$ , on retrouve la condition (14).

Gardons  $\vec{p}$  fixe et cherchons à minimaliser l'intégrale en variant  $v$  et  $\vec{q}$ ; nous obtenons les deux équations d'Euler suivantes pour un champ « extrémal »  $\hat{q}$ :

$$0 = v^2 \hat{q} - v^2 \vec{p}, \quad \text{d'où} \quad \hat{q} = \vec{p};$$

$$0 = v \hat{q}^2 - kv - 2\vec{p} \cdot \hat{q}v - \vec{p} \cdot \text{grad } v + \text{div}(v\vec{p}) = v \cdot (\text{div } \hat{q} - \hat{q}^2 - k);$$

donc

$$(15') \quad \text{div } \hat{q} - \hat{q}^2 = k;$$

$v$  quelconque,  $= 0$  sur  $\Gamma$ .

Si nous avons construit un tel champ vectoriel  $\hat{q}$  dans  $G$ ,  $v$  et  $\hat{q}$  satisfèront les équations d'Euler correspondant au choix  $\vec{p} = \hat{q}$ . L'intégrale devient alors, pour  $v$  et  $\hat{q}$  quelconques,

$$(16') \quad \iint_G [(\vec{q}^2 - 2\vec{q} \cdot \hat{q} - k)v^2 - \hat{q} \cdot \text{grad}(v^2)] dA \\ = \iint_G [(\vec{q} - \hat{q})^2 + \text{div } \hat{q} - \hat{q}^2 - k]v^2 dA \geq 0,$$

donc  $\lambda_1 \geq k$ ; on a l'égalité en choisissant  $\hat{q} = -\text{grad } u_1/u_1$ , d'où

$$(17') \quad \lambda_1 = \text{Max}_{\hat{q}; \text{div } \hat{q} - \hat{q}^2 = \text{const}} (\text{div } \hat{q} - \hat{q}^2).$$

C'est une spécialisation du principe de Maximum (cf. [12, 1, 14, 15, 10, 7, 9, 4]):

$$(18') \quad \lambda_1 = \text{Max}_{\vec{q}} \inf_G (\text{div } \vec{q} - \vec{q}^2);$$

nous voyons en effet que l'inégalité (16') reste satisfaite pourvu que  $\text{div } \hat{q} - \hat{q}^2 - k \geq 0$  dans tout  $G$ .

*Remarques.* — (a) Le principe (18') est essentiellement équivalent à (18): considérer le champ  $\vec{q} = (-f_x/f, -g_y/g)$ .

(b) Il n'y a pas lieu d'exiger la continuité des champs  $\vec{q}$  ou  $\hat{q}$ : il suffit que  $q_1$  soit continue en  $x$ ,  $q_2$  continue en  $y$ , et que les dérivées partielles  $q_{1x}$  et  $q_{2y}$  existent; la même remarque s'applique aux champs  $\vec{p}$  concurrents pour le principe de Thomson.