

§ 5. La transformation de Friedrichs conduit à une autre forme du même principe

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Réciproquement, si nous avons choisi une paire de fonctions $\{\hat{f}, \hat{g}\}$ satisfaisant (15) avec $k > 0$, posons $\mu(x, y) = -(1/k)(\hat{f}_{xx}/\hat{f})$; alors $1 - \mu = -(1/k)(\hat{g}_{yy}/\hat{g})$; les équations d'Euler relatives à μ sont alors satisfaites par \hat{f} et \hat{g} . Pour f et g ($= 0$ sur Γ) quelconques, nous vérifions

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \iint_G \tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y) dA &= \iint_G \left[f_x^2 + g_y^2 + \frac{\hat{f}_{xx}}{\hat{f}} f^2 + \frac{\hat{g}_{yy}}{\hat{g}} g^2 \right] dA \\ &= \iint_G \left[\left(f_x - \frac{\hat{f}_x}{\hat{f}} f \right)^2 + \left(g_y - \frac{\hat{g}_y}{\hat{g}} g \right)^2 \right] dA \geq 0, \end{aligned} \right.$$

donc $\lambda_1 \geq k$; on a l'égalité en choisissant $\hat{f} = \hat{g} = u_1(x, y)$, d'où

$$(17) \quad \lambda_1 = \text{Max}_{\substack{\{\hat{f}, \hat{g} > 0 \text{ dans } G \text{ satisfaisant} \\ (15) \text{ et } (13) \text{ avec } \chi(s) \equiv 0}} \left(-\frac{\hat{f}_{xx}}{\hat{f}} - \frac{\hat{g}_{yy}}{\hat{g}} \right).$$

C'est une spécialisation du principe de Maximum plus général [7]:

$$(18) \quad \lambda_1 = \text{Max}_{\substack{\{f, g > 0 \text{ dans } G \\ f_{xx} \text{ et } g_{yy} \text{ existent}}} \inf_G \left(-\frac{f_{xx}}{f} - \frac{g_{yy}}{g} \right);$$

mais les paires de fonctions plus particulières $\{\hat{f}, \hat{g}\}$ sont « les meilleures ».

§ 5. La transformation de Friedrichs conduit à une autre forme du même principe

Considérons de nouveau le principe de Rayleigh sous la forme (14); remarquons que la fonction propre $u_1(x, y)$ n'est déterminée qu'à un facteur constant près, il en est donc de même de $\text{grad } u_1$; tandis que le champ vectoriel $\text{grad } u_1/u_1$ est uniquement déterminé. C'est pourquoi, opérant presque comme Friedrichs (cf. 1.2), nous remplaçons $-\text{grad } v/v$ par \vec{q} , c'est-à-dire $-\text{grad } v$ par $v\vec{q}$ dans (14). $\lambda_1 \geq \max k$ sous la condition

$$\underset{v=0 \text{ sur } \Gamma}{\text{Min}}_{\vec{q}} \iint_G [v^2 \vec{q}^2 - kv^2 - 2v\vec{p} \cdot (\text{grad } v + v\vec{q})] dA \geq 0,$$

quel que soit le champ \vec{p} (« multiplicateur de Lagrange »); en effet, si l'on restreint la paire $\{v, \vec{q}\}$ par $\vec{q} = -\text{grad } v/v$, on retrouve la condition (14).

Gardons \vec{p} fixe et cherchons à minimaliser l'intégrale en variant v et \vec{q} ; nous obtenons les deux équations d'Euler suivantes pour un champ « extrémal » \hat{q} :

$$0 = v^2 \hat{q} - v^2 \vec{p}, \quad \text{d'où} \quad \hat{q} = \vec{p};$$

$$0 = v \hat{q}^2 - kv - 2\vec{p} \cdot \hat{q}v - \vec{p} \cdot \text{grad } v + \text{div}(v\vec{p}) = v \cdot (\text{div } \hat{q} - \hat{q}^2 - k);$$

donc

$$(15') \quad \text{div } \hat{q} - \hat{q}^2 = k;$$

v quelconque, $= 0$ sur Γ .

Si nous avons construit un tel champ vectoriel \hat{q} dans G , v et \hat{q} satisfèront les équations d'Euler correspondant au choix $\vec{p} = \hat{q}$. L'intégrale devient alors, pour v et \hat{q} quelconques,

$$(16') \quad \iint_G [(\vec{q}^2 - 2\vec{q} \cdot \hat{q} - k)v^2 - \hat{q} \cdot \text{grad}(v^2)] dA \\ = \iint_G [(\vec{q} - \hat{q})^2 + \text{div } \hat{q} - \hat{q}^2 - k]v^2 dA \geq 0,$$

donc $\lambda_1 \geq k$; on a l'égalité en choisissant $\hat{q} = -\text{grad } u_1/u_1$, d'où

$$(17') \quad \lambda_1 = \text{Max}_{\hat{q}; \text{div } \hat{q} - \hat{q}^2 = \text{const}} (\text{div } \hat{q} - \hat{q}^2).$$

C'est une spécialisation du principe de Maximum (cf. [12, 1, 14, 15, 10, 7, 9, 4]):

$$(18') \quad \lambda_1 = \text{Max}_{\vec{q}} \inf_G (\text{div } \vec{q} - \vec{q}^2);$$

nous voyons en effet que l'inégalité (16') reste satisfaite pourvu que $\text{div } \hat{q} - \hat{q}^2 - k \geq 0$ dans tout G .

Remarques. — (a) Le principe (18') est essentiellement équivalent à (18): considérer le champ $\vec{q} = (-f_x/f, -g_y/g)$.

(b) Il n'y a pas lieu d'exiger la continuité des champs \vec{q} ou \hat{q} : il suffit que q_1 soit continue en x , q_2 continue en y , et que les dérivées partielles q_{1x} et q_{2y} existent; la même remarque s'applique aux champs \vec{p} concurrents pour le principe de Thomson.