Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 11 (1965)

Heft: 2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE TRANSFORMATION VARIATIONNELLE APPARENTÉE A CELLE DE FRIEDRICHS, CONDUISANT A LA MÉTHODE DES PROBLÈMES AUXILIAIRES UNIDIMENSIONNELS

Autor: Hersch, Joseph

Kapitel: § 5. La transformation de Friedrichs conduit à une autre forme du même principe

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39972

Réciproquement, si nous avons choisi une paire de fonctions $\{\hat{f}, \hat{g}\}$ satisfaisant (15) avec $k > 0$, posons $\mu(x, y) = -(1/k)$ $(\hat{f}_{xx}/\hat{f})$; alors $1 - \mu = -(1/k)\,(\hat{g}_{yy}/\hat{g})$; les équations d'Euler relatives à μ sont alors satisfaites par $\hat{f}$ et $\hat{g}$. Pour f et g ($= 0$ sur Γ) quelconques, nous vérifions

$$(16)\quad \begin{cases} \displaystyle\iint_G \tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y)\, dA = \iint_G \left[f_x^2 + g_y^2 + \frac{\hat{f}_{xx}}{\hat{f}} f^2 + \frac{\hat{g}_{yy}}{\hat{g}} g^2 \right] dA \\ \displaystyle\qquad = \iint_G \left[\left(f_x - \frac{\hat{f}_x}{\hat{f}} f \right)^2 + \left(g_y - \frac{\hat{g}_y}{\hat{g}} g \right)^2 \right] dA \geqq 0, \end{cases}$$

donc $\lambda_1 \geqq k$; on a l'égalité en choisissant $\hat{f} = \hat{g} = u_1(x, y)$, d'où

$$(17)\qquad \lambda_1 = \operatorname{Max}_{\left\{\substack{\hat{f}, \hat{g} > 0 \text{ dans } G \text{ satisfaisant} \\ (15) \text{ et } (13) \text{ avec } \chi(s) \equiv 0}\right.} \left(-\frac{\hat{f}_{xx}}{\hat{f}} - \frac{\hat{g}_{yy}}{\hat{g}} \right).$$

C'est une spécialisation du principe de Maximum plus général [7]:

$$(18)\qquad \lambda_1 = \operatorname{Max}_{\left\{\substack{f, g > 0 \text{ dans } G \\ f_{xx} \text{ et } g_{yy} \text{ existent}}\right.} \inf_G \left(-\frac{f_{xx}}{f} - \frac{g_{yy}}{g} \right);$$

mais les paires de fonctions plus particulières $\{\hat{f}, \hat{g}\}$ sont « les meilleures ».

§ 5. La transformation de Friedrichs conduit à une autre forme du même principe

Considérons de nouveau le principe de Rayleigh sous la forme (14); remarquons que la fonction propre $u_1(x, y)$ n'est déterminée qu'à un facteur constant près, il en est donc de même de grad u_1; tandis que le champ vectoriel grad u_1/u_1 est uniquement déterminé. C'est pourquoi, opérant presque comme Friedrichs (cf. 1.2), nous remplaçons — grad v/v par $\vec{q}$, c'est-à-dire — grad v par $v\vec{q}$ dans (14). $\lambda_1 \geqq \max k$ sous la condition

$$\forall_{\substack{v, \vec{q} \\ v=0 \text{ sur } \Gamma}} \iint_G [v^2 \vec{q}^{\,2} - kv^2 - 2v\vec{p} \cdot (\operatorname{grad} v + v\vec{q})]\, dA \geqq 0,$$

quel que soit le champ $\vec{p}$ (« multiplicateur de Lagrange »); en effet, si l'on restreint la paire $\{ v, \vec{q} \}$ par $\vec{q} = -\operatorname{grad} v/v$, on retrouve la condition (14).

Gardons $\vec{p}$ fixe et cherchons à minimaliser l'intégrale en variant v et $\vec{q}$; nous obtenons les deux équations d'Euler suivantes pour un champ « extrémal » $\hat{\vec{q}}$:

$$0 = v^2 \hat{\vec{q}} - v^2 \vec{p}, \quad \text{d'où} \quad \hat{\vec{q}} = \vec{p}\,;$$

$$0 = v \hat{\vec{q}}^{\,2} - kv - 2\vec{p} \cdot \hat{\vec{q}} v - \vec{p} \cdot \operatorname{grad} v + \operatorname{div}(v\vec{p}) = v \cdot (\operatorname{div} \hat{\vec{q}} - \hat{\vec{q}}^{\,2} - k)\,;$$

donc

$$\text{(15')} \qquad \operatorname{div} \hat{\vec{q}} - \hat{\vec{q}}^{\,2} = k\,;$$

v quelconque, $= 0$ sur Γ.

Si nous avons construit un tel champ vectoriel $\hat{\vec{q}}$ dans G, v et $\hat{\vec{q}}$ satisferont les équations d'Euler correspondant au choix $\vec{p} = \hat{\vec{q}}$. L'intégrale devient alors, pour v et $\vec{q}$ quelconques,

$$\text{(16')} \qquad \iint_G [(\vec{q}^{\,2} - 2\vec{q} \cdot \hat{\vec{q}} - k)v^2 - \hat{\vec{q}} \cdot \operatorname{grad}(v^2)]\, dA$$

$$= \iint_G [(\vec{q} - \hat{\vec{q}})^2 + \operatorname{div} \hat{\vec{q}} - \hat{\vec{q}}^{\,2} - k] v^2\, dA \geqq 0\,,$$

donc $\lambda_1 \geqq k$; on a l'égalité en choisissant $\hat{\vec{q}} = -\operatorname{grad} u_1/u_1$, d'où

$$\text{(17')} \qquad \lambda_1 = \operatorname{Max}_{\hat{\vec{q}}\,;\ \operatorname{div} \hat{\vec{q}} - \hat{\vec{q}}^{\,2} = \text{const}} (\operatorname{div} \hat{\vec{q}} - \hat{\vec{q}}^{\,2})\,.$$

C'est une spécialisation du principe de Maximum (cf. [12, 1, 14, 15, 10, 7, 9, 4]):

$$\text{(18')} \qquad \lambda_1 = \operatorname{Max}_{\vec{q}} \inf_G (\operatorname{div} \vec{q} - \vec{q}^{\,2})\,;$$

nous voyons en effet que l'inégalité (16') reste satisfaite pourvu que $\operatorname{div} \hat{\vec{q}} - \hat{\vec{q}}^{\,2} - k \geqq 0$ dans tout G.

Remarques. — *(a)* Le principe (18') est essentiellement équivalent à (18): considérer le champ $\vec{q} = (-f_x/f, -g_y/g)$.

(b) Il n'y a pas lieu d'exiger la continuité des champs $\vec{q}$ ou $\hat{\vec{q}}$: il suffit que q_1 soit continue *en* x, q_2 continue *en* y, et que les dérivées partielles q_{1_x} et q_{2_y} existent; la même remarque s'applique aux champs $\vec{p}$ concurrents pour le principe de Thomson.