ÉTUDE DES ESPACES UNIFORMES A PARTIR DE LA NOTION D'ÉCART

Autor(en): **Choquet, Gustave**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

ÉTUDE DES ESPACES UNIFORMES A PARTIR DE LA NOTION D'ÉCART

par Gustave CHOQUET

On sait que toute structure uniforme sur un ensemble E peut être définie par une famille d'écarts sur E. Si l'on met cette propriété à la base de l'étude des espaces uniformes, on obtient un exposé très intuitif, et facilement accessible à qui connaît un peu les espaces métriques.

1. *Structure uniforme sur un ensemble.* — Rappelons (voir BOURBAKI, *Topologie générale*, ch. II) qu'une structure uniforme sur un ensemble E est constituée par la donnée d'un filtre $\mathcal{U}$ sur l'ensemble $E \times E$, qui satisfait aux propriétés suivantes:

U_1: Tout ensemble $V \in \mathcal{U}$ contient la diagonale Δ de $E \times E$;
U_2: Pour tout $V \in \mathcal{U}$, si V^{-1} désigne le symétrique de V, on a aussi $V^{-1} \in \mathcal{U}$;
U_3: Pour tout $V \in \mathcal{U}$, il existe $W \in \mathcal{U}$ tel que $((x, y) \in W$ et $(y, z) \in W)$ entraîne $(x, z) \in V$.

Les éléments de $\mathcal{U}$ s'appellent les *entourages* de la structure uniforme; toute base du filtre $\mathcal{U}$ s'appelle une *base d'entourages* de cette structure.

2. *Famille filtrante d'écarts sur un ensemble.* — Rappelons qu'un *écart* d sur un ensemble E est une application de $E \times E$ dans $[0, \infty]$ telle que:

E_1: $d(x, x) = 0$ pour tout $x \in E$;
E_2: $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous $x, y \in E$;
E_3: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pour tous $x, y, z \in E$.

Pour tout nombre $\varepsilon > 0$ on appelle *entourage « ouvert »* (resp. « fermé ») d'ordre (d, ε), l'ensemble $V_{d, \varepsilon}$ de $E \times E$ défini par:

$$V_{d, \varepsilon} = \{(x, y) : d(x, y) < \varepsilon\} \ (resp.\ d(x, y) \leqslant \varepsilon)$$

Soit alors $(d_i)_{i\in I}$ une famille, finie ou infinie, d'écarts sur E, qui soit *filtrante* en ce sens que si d, d' appartiennent à la famille, il existe un d'' de la famille tel que $d \leqq d''$ et $d' \leqq d''$.

De la relation:

$$V_{d'', \varepsilon''} \subset V_{d, \varepsilon} \cap V_{d', \varepsilon'}$$

lorsque $d, d' \leqq d''$ et $\varepsilon, \varepsilon' \geqslant \varepsilon''$ résulte que l'ensemble des entourages $V_{d_i, \varepsilon}$ constitue une base de filtre sur $E \times E$; on vérifie que le filtre associé définit sur E une structure uniforme qu'on appelle *structure uniforme associée à la famille des écarts* d_ι (plus généralement, si la famille (d_i) donnée n'est pas filtrante, on lui ajoute les enveloppes supérieures des sous-familles finies, ce qui fournit une famille filtrante, d'où une structure uniforme).

On démontre (voir Bourbaki, *Topologie générale*, ch. X) qu'inversement toute structure uniforme sur E est la structure uniforme associée à une certaine famille filtrante d'écarts sur E (la plus grande de ces familles étant la famille de *tous* les écarts uniformément continus sur E). Nous admettrons ce résultat, qu'on démontre directement (par une démonstration assez longue mais élémentaire) à partir des axiomes U_1, U_2, U_3; et nous allons voir maintenant son utilisation dans l'étude des espaces uniformes.

3. *Topologie d'un espace uniforme.* — Soit E un espace uniforme, défini par une famille filtrante d'écarts $(d_i)_{i\in I}$ sur E.

Pour tout $a \in E$, on appelle *boule ouverte de centre* a tout ensemble de la forme

$$B(a, \varepsilon, i) = \{x : d_i(a, x) < \varepsilon\}, \quad \text{où} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad i \in I.$$

Si l'on appelle *ouvert* de E toute réunion de boules ouvertes, on vérifie que l'ensemble de ces « ouverts » satisfait aux axiomes des espaces topologiques; la topologie ainsi définie s'appelle *topologie associée à la famille* (d_i); il est immédiat qu'elle ne dépend que de la structure uniforme de E.

L'inégalité

$$| d_i(x, y) - d_i(x', y') | \geqslant d_i(x, x') + d_i(y, y')$$

montre que chacun des écarts d_i est continu sur l'espace topologique $E \times E$. Il en résulte que chacun des entourages « ouverts » (resp. « fermés ») $V_{d_i, \varepsilon}$ est un ouvert (resp. un fermé) de $E \times E$. Donc tout entourage est un voisinage de la diagonale, et les entourages fermés constituent une base de la structure uniforme de E.

4. *Espaces séparés.* Si la topologie de E est séparée, pour tout $(a, b) \notin \Delta$, il existe une boule ouverte $B(a, \varepsilon, i)$ ne contenant pas b, ce qui entraîne $d_i(a, b) \neq 0$. Inversement, s'il existe un écart d_i tel que $d_i(a, b) \neq 0$, la fonction continue $x \to d_i(a, x)$ sépare a, b.

Donc dire que la topologie de E est séparée équivaut à dire que, pour tout $(a, b) \notin \Delta$, il existe un entourage $V_{d_i, \varepsilon}$ ne contenant pas (a, b); autrement dit, que l'intersection des $V_{d_i, \varepsilon}$ est identique à Δ.

Si la topologie de E n'est pas séparée, introduisons sur E la relation R ainsi définie:

$$x \sim x' \quad \text{si} \quad d_i(x, x') = 0 \quad \text{pour tout} \quad i \in I.$$

C'est évidemment une relation d'équivalence; désignons par $\tilde{E}$ l'ensemble quotient E/R, et par φ l'application canonique $x \to \tilde{x}$ de E sur $\tilde{E}$.

L'inégalité triangulaire montre que si $x \sim x'$ et $y \sim y'$, on a $d_i(x, y) = d_i(x', y')$ pour tout i; donc on définit une fonction $\tilde{d}_i$ sur $\tilde{E} \times \tilde{E}$ en posant

$$\tilde{d}_i(\tilde{x}, \tilde{y}) = d_i(x, y);$$

on vérifie que cette fonction est un écart sur $\tilde{E}$.

L'espace uniforme défini sur $\tilde{E}$ par la famille des $\tilde{d}_i$ est évidemment séparé; on l'appelle *espace séparé associé à* E.

5. *Complétion.* — Soit E un espace uniforme défini par une famille $(d_i)_{i \in I}$ d'écarts sur E.

Un filtre $\mathcal{F}$ sur E est dit *filtre de Cauchy* si pour tout $i \in I$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $X \in \mathcal{F}$ tel que, pour tous $x, y \in X$ on ait $d_i(x, y) \leq \varepsilon$ (ce qui s'exprime encore en disant que le diamètre de X relativement à d_i est $\leq \varepsilon$).

On dit que E est *complet* si tout filtre de Cauchy sur E est convergent.

Remarquons que, dire que $\mathscr{F}$ est un filtre de Cauchy sur E équivaut à dire que son image $\varphi(\mathscr{F})$ dans l'espace séparé $\tilde{E}$ est un filtre de Cauchy; et dire que $\mathscr{F}$ converge vers un point a de E équivaut à dire que $\varphi(\mathscr{F})$ converge vers $\varphi(a)$.

Donc dans l'étude des espaces complets et de la complétion des espaces non complets, on peut se borner à considérer des espaces séparés.

Supposons donc E séparé. Pour tout $i \in I$, soit E_i le quotient de E par la relation d'équivalence: $x \sim y$ si $d_i(x, y) = 0$; soit φ_i l'application canonique de E sur E_i, et soit $\tilde{d}_i$ l'écart sur E_i associé à d_i.

Admettons maintenant connu ce qu'est le complété d'un espace métrique; $\tilde{d}_i$ est une distance sur E_i (à valeurs éventuellement $+\infty$, ce qui n'est pas gênant); désignons par $\hat{E}_i$ le complété de E_i.

Soit F le produit des ensembles $\hat{E}_i$, muni de la famille des écarts δ_i définis par $\delta_i(x, y) = \tilde{d}_i(x_i, y_i)$; et soit φ l'application, de composantes φ_i, de E dans F.

Comme E est séparé, φ est une injection, et c'est une isomorphie de E sur $\varphi(E)$ en ce sens que, pour tout i, on a $d_i = \delta_i \cdot \varphi$. Or les $\hat{E}_i$ étant complets, leur produit F l'est aussi, donc aussi le fermé $\overline{\varphi(E)}$ de F. On a donc bien plongé E (identifié à $\varphi(E)$) dans l'espace uniforme séparé complet $\overline{\varphi(E)}$.

L'unité d'une telle complétion, à une isomorphie près, se démontre ensuite de la façon habituelle.

6. *Structure uniforme d'un espace compact.* — Soit E un espace compact, et soit $\mathscr{C}(E)$ l'espace des applications continues de E dans R. Nous admettrons ici que $\mathscr{C}(E)$ sépare les points de E.

Soit alors (f_i) une famille d'éléments de $\mathscr{C}(E)$, qui sépare les points de E; et posons $d_i(x, y) = | f_i(x) - f_i(y) |$.

Chaque d_i est un écart sur E, donc la famille (d_i) définit sur E une structure uniforme $\mathscr{U}$; et celle-ci est séparée puisque la famille f_i sépare les points de E.

Comme chaque d_i est évidemment une fonction continue sur $E \times E$, la topologie associée à $\mathscr{U}$ est moins fine que la topologie de E; et comme elle est séparée, elle lui est identique.

Donc il existe bien sur E au moins une structure uniforme compatible avec la topologie de E.

L'unicité d'une telle structure se démontre de façon classique en remarquant que l'ensemble de ses entourages fermés est nécessairement identique à l'ensemble des voisinages fermés de Δ dans $E \times E$.

Lorsque la topologie de E a une base dénombrable d'ouverts, on peut prendre la famille (f_i) dénombrable; la structure uniforme définie par les d_i est alors métrisable.

7. *Semi-normes sur un espace vectoriel.* — Soit E un espace vectoriel sur R ou C; rappelons qu'on appelle *semi-norme* sur E toute application p de E dans $[0, +\infty]$ telle que, pour tous $x, y \in E$, et tout scalaire λ, on ait:

$$1) \quad p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x)$$

$$2) \quad p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \, .$$

A une semi-norme p sur E on associe l'écart d sur E défini par $d(x, y) = p(x - y)$.

A toute famille (p_i) de semi-normes sur E est ainsi associée une famille d'écarts (d_i), d'où une structure uniforme sur E, d'où aussi une topologie sur E.

On démontre que la classe des espaces vectoriels topologiques ainsi obtenus est identique à la classe des espaces vectoriels localement convexes.

L'utilisation des semi-normes permet de définir et d'étudier, sans une technique compliquée, des espaces vectoriels topologiques intéressants, par exemple la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, ou les topologies faibles (définies par des semi-normes $|l_i|$, où l_i est une forme linéaire).

Le 14 mars 1964.

G. Choquet
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre Curie
Paris V^e^