

# SUR QUELQUES POLYÈDRES EN GÉOMÉTRIE DES NOMBRES

Autor(en): **Ehrhart, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-39976>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR QUELQUES POLYÈDRES EN GÉOMÉTRIE DES NOMBRES

par E. EHRHART,

Dans un article paru dans *L'Enseignement mathématique*, tome X (1964), pp. 138-146, nous avons formulé une conjecture relative à un corps convexe fermé: Ses hauteurs  $a, b, c$  dans les directions des axes orthonormés, son volume  $V$ , sa surface  $S$  et le nombre  $j$  de ses points entiers vérifient la relation

$$(1) \quad j \leq V + \frac{S}{2} + a + b + c + 1 ;$$

l'égalité n'est atteinte que pour les parallélépipèdes entiers, dont les arêtes sont parallèles aux axes.

Nous allons démontrer cette relation pour trois classes de polyèdres convexes.

Rappelons qu'un polygone ou un polyèdre sont dits *entiers*, si les coordonnées de leurs sommets sont des nombres entiers. Le *périmètre réticulaire* d'un polygone entier s'obtient en prenant comme unité de longueur sur chaque côté la maille du réseau rectiligne de ses points entiers. De même l'*aire réticulaire* d'un polyèdre s'obtient en prenant comme unité d'aire dans chaque face la maille du réseau plan de ses points entiers.

## I. *Prisme entier*

Soit ( $P$ ) un prisme convexe entier fermé,  $j$  le nombre de ses points entiers,  $p$  le nombre de points entiers de sa surface,  $V$  son volume,  $S$  son aire et  $S', l', \beta'$  respectivement les mesures réticulaires de sa surface, d'une arête latérale et du périmètre de sa base.

On sait que

$$j - \frac{p}{2} = V + l' + \frac{\beta'}{2}, \quad (1)$$

---

<sup>1)</sup> *Comptes rendus de l'Acad. des sc.*, 243, 1956, p. 349 (formule 3).

ou, comme  $p = S' + 2^1$ ),

$$(2) \quad j = V + \frac{S'}{2} + l' + \frac{\beta'}{2} + 1 .$$

Si  $a, b, c$  sont les dimensions du parallélépipède ( $\mathcal{P}$ ) circonscrit à ( $P$ ) parallèlement aux plans de coordonnées,  $l' < c$  et  $\beta' \leq \beta \leq 2(a+b)$ , où  $\beta$  est le périmètre réticulaire de la projection d'une base de ( $P$ ) sur le plan  $XOY$ . D'autre part,  $S' \leq S$ . Donc (2) entraîne (1), où l'égalité n'est atteinte que si ( $P$ ) et ( $\mathcal{P}$ ) coïncident.

## II. Tronc de prisme entier, dont une base a un centre de symétrie

Soit  $\omega$  le centre de symétrie d'une base convexe fermée ( $B'$ ),  $j'$  le nombre de ses points entiers,  $p'$  le nombre de points entiers de son contour,  $s'$  son aire,  $s''$  son aire réticulaire et  $a', b', c'$  ses hauteurs dans les directions des axes de coordonnées. Le symétrique ( $P_2$ ) du tronc de prisme ( $P_1$ ) par rapport à  $\omega$  complète ( $P_1$ ) à un prisme, qui vérifie (1). Comme les caractéristiques de ( $P_2$ ) sont les mêmes que celles de  $P_1$  (dotées de l'indice 1),

$$\begin{aligned} j &= 2j_1 - j' , & S &= 2S_1 - 2s' , & V &= 2V_1 , \\ a &= 2a_1 - a' , & b &= 2b_1 - b' , & c &= 2c_1 - c' . \end{aligned}$$

Par ces substitutions, (1) devient

$$(3) \quad j_1 \leq V_1 + \frac{S_1}{2} + a_1 + b_1 + c_1 + 1 + \frac{1}{2}(j' - s' - a' - b' - c' - 1) .$$

Or  $j' = s'' + \frac{p'}{2} + 1$  (corollaire du théorème 1 de l'article cité au début). Mais  $s'' \leq s'$  et  $p' \leq p'' \leq 2(a'+b')$ , où  $p''$  désigne le nombre de points entiers de la projection du contour de ( $B'$ ) sur le plan  $XOY$ . (Ceci suppose que le plan de ( $B'$ ) ne soit pas perpendiculaire à  $XOY$ , en quel cas on projetterait sur  $XOZ$  ou sur  $YOZ$ .) Dans (3) l'expression entre parenthèses est donc négative ou nulle.

<sup>1)</sup> *Comptes rendus*, 242, 1956, p. 2217 (formule 1).

### III. Une famille de pyramides

Soit ( $P$ ) une pyramide dont le pied de la hauteur entière  $c$  se trouve dans la base fermée convexe, qui est située dans le plan des axes  $OX$ ,  $OY$  et a pour hauteurs dans la direction de ces axes  $a$  et  $b$ . On suppose  $12c \geq b \geq a$ .

Coupons ( $P$ ) par le plan  $Z = c - n$ . Soient  $j_n$  le nombre de points entiers de la section fermée et  $s_n, l_n$  sa surface et son périmètre. On sait (voir l'article mentionné au début) que

$$j_n < s_n + \frac{l_n}{2} + 1.$$

Par suite

$$(4) \quad j = 1 + \sum_1^{n=c} j_n < \sum_1^c s_n + \frac{1}{2} \sum_1^c l_n + c + 1.$$

Comme  $s_n = n^2 \frac{s_c}{c^2}$ ,

$$\sum_1^c s_n = \frac{c(c+1)(2c+1)}{6} \frac{s_c}{c^2} = \frac{s_c}{6c} (2c^2 + 3c + 1) = V + \frac{s_c}{2} + \frac{s_c}{6c}.$$

D'autre part,  $l_n = \frac{n}{c} l_c$  donne

$$\sum_1^c \frac{cl_c}{2} + \frac{l_c}{2} < S' + \frac{l_c}{2},$$

où  $S'$  désigne la surface latérale de la pyramide. De (4) on déduit alors

$$j < V + \frac{S}{2} + a + b + c + 1 + \left( \frac{s_c}{6c} + \frac{l_c}{4} - a - b \right).$$

Il reste à montrer que l'expression entre parenthèses est négative ou nulle. Comme

$$s_c \leq \frac{ab}{2} \quad \text{el} \quad l_c \leq 2(a+b),$$

il suffit que

$$\frac{ab}{12c} \leq \frac{a+b}{2},$$

qui est vérifiée car  $12c \geq b$  et  $a+b \geq 2a$ .

Remarque. — *L'inégalité (1) est donc en particulier vérifiée par tout tétraèdre entier*  $O(o, o, o)$   $A(a, o, o)$   $B(o, b, o)$   $C(o, o, c)$ .

*(reçu le 30 janvier 1964)*

E. Ehrhart  
11, rue de Bruges  
Strasbourg