SUR QUELQUES POLYÈDRES EN GÉOMÉTRIE DES NOMBRES

SUR QUELQUES POLYÈDRES EN GÉOMÉTRIE DES NOMBRES

par E. EHRHART,

Dans un article paru dans *L'Enseignement mathématique*, tome X (1964), pp. 138-146, nous avons formulé une conjecture relative à un corps convexe fermé: Ses hauteurs a, b, c dans les directions des axes orthonormés, son volume V, sa surface S et le nombre j de ses points entiers vérifient la relation

$$j \leqq V + \frac{S}{2} + a + b + c + 1 \; ; \tag{1}$$

l'égalité n'est atteinte que pour les parallélépipèdes entiers, dont les arêtes sont parallèles aux axes.

Nous allons démontrer cette relation pour trois classes de polyèdres convexes.

Rappelons qu'un polygone ou un polyèdre sont dits *entiers*, si les coordonnées de leurs sommets sont des nombres entiers. Le *périmètre réticulaire* d'un polygone entier s'obtient en prenant comme unité de longueur sur chaque côté la maille du réseau rectiligne de ses points entiers. De même l'*aire réticulaire* d'un polyèdre s'obtient en prenant comme unité d'aire dans chaque face la maille du réseau plan de ses points entiers.

I. *Prisme entier*

Soit (P) un prisme convexe entier fermé, j le nombre de ses points entiers, p le nombre de points entiers de sa surface, V son volume, S son aire et S', l', β' respectivement les mesures réticulaires de sa surface, d'une arête latérale et du périmètre de sa base.

On sait que

$$j - \frac{p}{2} = V + l' + \frac{\beta'}{2}, \text{ [1]}$$

[1] *Comptes rendus de l'Acad. des sc.*, 243, 1956, p. 349 (formule 3).

ou, comme $p = S'+2$ [1]),

$$(2) \qquad j = V + \frac{S'}{2} + l' + \frac{\beta'}{2} + 1 .$$

Si a, b, c sont les dimensions du parallélépipède ($\mathscr{P}$) circonscrit à (P) parallèlement aux plans de coordonnées, $l' < c$ et $\beta' \leqq \beta \leqq 2(a+b)$, où β est le périmètre réticulaire de la projection d'une base de (P) sur le plan XOY. D'autre part, $S' \leqq S$. Donc (2) entraîne (1), où l'égalité n'est atteinte que si (P) et ($\mathscr{P}$) coïncident.

II. *Tronc de prisme entier, dont une base a un centre de symétrie*

Soit ω le centre de symétrie d'une base convexe fermée (B'), j' le nombre de ses points entiers, p' le nombre de points entiers de son contour, s' son aire, s'' son aire réticulaire et a', b', c' ses hauteurs dans les directions des axes de coordonnées. Le symétrique (P_2) du tronc de prisme (P_1) par rapport à ω complète (P_1) à un prisme, qui vérifie (1). Comme les caractéristiques de (P_2) sont les mêmes que celles de P_1 (dotées de l'indice 1),

$$j = 2j_1 - j' , \qquad S = 2S_1 - 2s' , \qquad V = 2V_1 ,$$
$$a = 2a_1 - a' , \qquad b = 2b_1 - b' , \qquad c = 2c_1 - c' .$$

Par ces substitutions, (1) devient

$$(3) \quad j_1 \leqq V_1 + \frac{S_1}{2} + a_1 + b_1 + c_1 + 1 + \frac{1}{2}(j' - s' - a' - b' - c' - 1) .$$

Or $j' = s'' + \dfrac{p'}{2} + 1$ (corollaire du théorème 1 de l'article cité au début). Mais $s'' \leqq s'$ et $p' \leqq p'' \leqq 2(a'+b')$, où p'' désigne le nombre de points entiers de la projection du contour de (B') sur le plan XOY. (Ceci suppose que le plan de (B') ne soit pas perpendiculaire à XOY, en quel cas on projetterait sur XOZ ou sur YOZ.) Dans (3) l'expression entre parenthèses est donc négative ou nulle.

---

[1]) *Comptes rendus*, 242, 1956, p. 2217 (formule 1).

III. *Une famille de pyramides*

Soit (P) une pyramide dont le pied de la hauteur entière c se trouve dans la base fermée convexe, qui est située dans le plan des axes OX, OY et a pour hauteurs dans la direction de ces axes a et b. On suppose $12c \geqq b \geqq a$.

Coupons (P) par le plan $Z = c - n$. Soient j_n le nombre de points entiers de la section fermée et s_n, l_n sa surface et son périmètre. On sait (voir l'article mentionné au début) que

$$j_n < s_n + \frac{l_n}{2} + 1 .$$

Par suite

$$j = 1 + \sum_{1}^{n=c} j_n < \sum_{1}^{c} s_n + \frac{1}{2}\sum_{1}^{c} l_n + c + 1 . \tag{4}$$

Comme $s_n = n^2 \dfrac{s_c}{c^2}$,

$$\sum_{1}^{c} s_n = \frac{c(c+1)(2c+1)}{6}\frac{s_c}{c^2} = \frac{s_c}{6c}(2c^2+3c+1) = V + \frac{s_c}{2} + \frac{s_c}{6c} .$$

D'autre part, $l_n = \dfrac{n}{c} l_c$ donne

$$\sum_{1}^{c} \frac{cl_c}{2} + \frac{l_c}{2} < S' + \frac{l_c}{2} ,$$

où S' désigne la surface latérale de la pyramide. De (4) on déduit alors

$$j < V + \frac{S}{2} + a + b + c + 1 + \left(\frac{s_c}{6c} + \frac{l_c}{4} - a - b\right) .$$

Il reste à montrer que l'expression entre parenthèses est négative ou nulle. Comme

$$s_c \leqq \frac{ab}{2} \quad \text{el} \quad l_c \leqq 2(a+b) ,$$

il suffit que

$$\frac{ab}{12c} \leqq \frac{a+b}{2},$$

qui est vérifiée car $12c \geqq b$ et $a+b \geqq 2a$.

Remarque. — *L'inégalité (1) est donc en particulier vérifiée par tout tétraèdre entier* O (o, o, o) A (a, o, o) B (o, b, o) C (o, o, c).

(reçu le 30 janvier 1964)

E. Ehrhart
11, rue de Bruges
Strasbourg