

# REMARQUES CONCERNANT UN PROBLÈME DE REPRÉSENTATION DES VARIÉTÉS GÉNÉRALISÉES, ET SON RAPPORT AU MOUVEMENT STATIONNAIRE D'UN FLUIDE

Autor(en): **Young, L. C.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-39977>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

REMARQUES CONCERNANT UN PROBLÈME  
DE REPRÉSENTATION DES VARIÉTÉS  
GÉNÉRALISÉES, ET SON RAPPORT AU MOUVEMENT  
STATIONNAIRE D'UN FLUIDE <sup>1)</sup> <sup>2)</sup>

par L. C. YOUNG

*A la mémoire de mon père,  
à l'occasion de son centenaire.*

1. INTRODUCTION.

Nous avons fait allusion, dans plusieurs travaux, au rôle que peuvent jouer, dans la mécanique des fluides, certaines questions de la théorie des variétés généralisées. C'est le cas du problème de représentation que nous discuterons ici, et qui n'est autre, en fin de compte, que celui de retrouver la description lagrangienne d'un mouvement fluide stationnaire. C'est un problème qui nous a occupé à plusieurs reprises: il concerne la représentabilité d'une variété généralisée comme mélange de variétés plus simples, et le cœur du problème consiste, à proprement parler, à montrer que toute variété généralisée, dont la frontière est bénigne, aurait également un substratum bénin. Cette espèce d'énoncés, dont la conclusion est, pour ainsi dire, plus forte que l'hypothèse, peut être nommée progressive. On en trouve un peu partout en mathématique, et leur importance a été relevée par H. Poincaré. Il est vraisemblable qu'il existe, pour les variétés généralisées  $k$ -dimensionnelles de l'espace à  $n$  dimensions, un tel théorème progressif. C'est ce que nous vérifions ici pour les cas où  $k = 0, 1, n - 1, n$ . Les cas intermédiaires, où  $k = 2, 3, \dots, n - 2$ , se trouvent encore hors de la portée de nos

---

<sup>1)</sup> Sponcered by the Mathematics Research Center, U.S. Army, Madison, Wisconsin, under Contract No. DA-44-022-ORD-2059, and by the Nat. Sc. Foundation under Contract NSF-G18909.

<sup>2)</sup> Conférence faite à Lausanne le 28 octobre 1963.

méthodes: cela tient, comme nous l'avons indiqué ailleurs [13, III, V], à notre ignorance de toutes sortes de choses des plus simples. La valeur  $k = 1$  est celle qui se présente dans le mouvement des fluides; ce cas n'a pas été traité précédemment, sauf pour  $n = 2$  [9]. Le cas où  $k = n - 1$  a été traité, un peu plus tard, pour  $n = 3$ , avec quelques restrictions supplémentaires concernant la frontière. Les valeurs  $k = 0$  et  $k = n$  donnent lieu à deux cas dégénérés, dont le premier est trivial, tandis que le second se relie à des travaux récents sur les gradients généralisés [3].

## 2. DESCRIPTIONS EULÉRIENNES ET LAGRANGIENNES.

Dans la suite, on sous-entendra les conventions usuelles de l'analyse: les ensembles seront boréliens, les fonctions mesurables dans le même sens, les ensembles de mesure nulle, par rapport à la mesure dont il s'agit au moment donné, seront négligés.

Un mouvement fluide stationnaire dans l'espace à  $n$  dimensions se définit, dans la description eulérienne, par une mesure  $\mu$  et par une fonction, à valeurs vectorielles,  $\nu = \nu(x)$  que nous nommons la vitesse au point  $x$ . Nous supposons  $\mu$  à valeurs finies, au moins pour les ensembles compacts. La mesure  $\mu$  est celle de la quantité du fluide se trouvant dans un ensemble quelconque; on l'exprime souvent par l'intégrale de volume correspondante de la densité  $\rho$  du fluide. Dans le cas le plus général,  $\rho$  est une distribution de Schwartz; dans un grand nombre de problèmes classiques  $\rho$  est une constante, mais ici nous supposons plutôt que  $\nu(x)$  est un vecteur de grandeur unité, ce qui ne représente pas une restriction véritable, puisque la vitesse n'intervient que multipliée par la densité  $\rho$  qu'on aura modifiée convenablement pour compenser. De toute façon, nous considérons la mesure  $\mu$  comme un élément fondamental de la description eulérienne, tout autant que la vitesse unité, définie par le vecteur  $\nu(x)$ .

Dans la mécanique classique des fluides, on passe de la description eulérienne à celle de Lagrange, en résolvant le

système d'équations différentielles du premier ordre

$$(2.1) \quad x' = v(x).$$

Ici  $x'$  pourra maintenant désigner une dérivée prise par rapport à la longueur d'arc  $s$ , et les lignes intégrales, ou lignes de courant, auront la forme  $x = x(s, \alpha)$ , où  $\alpha$  est une étiquette plutôt qu'une valeur initiale; ce sont là les solutions classiques de (2.1), et deux d'entre elles peuvent très bien se toucher à plusieurs reprises, même le long d'arcs entiers.

La description lagrangienne classique consiste moins en la connaissance des lignes de courant, que dans celle d'une décomposition de l'espace en sous-ensembles  $E_\alpha$ , où chaque  $E_\alpha$  appartient à une ligne de courant correspondante. Comme les  $E_\alpha$  seront disjoints, on ne peut pas en général les identifier avec les lignes de courant, mais plutôt avec des sous-ensembles convenables. Le symbole  $\alpha$  est encore une étiquette, mais ce n'est naturellement plus la même que précédemment, et chaque  $E_\alpha$  sera supposé de longueur finie et positive. En outre,  $E_\alpha$  étant un sous-ensemble d'une courbe rectifiable, aura une orientation déterminée. De la connaissance d'une décomposition de l'espace en de tels sous-ensembles  $E_\alpha$  orientés, on retrouve alors, en passant à la tangente, la vitesse  $v(x)$  — du moins presque partout sur chaque ligne de courant.

Par contre, il n'y a pas moyen d'en déduire l'autre élément fondamental de notre description eulérienne, la mesure  $\mu$ .

Pour cette raison, nous allons modifier légèrement la description lagrangienne classique. Le lecteur nous le pardonnera sans doute, puisqu'elle date encore du bon vieux temps où les mathématiques entières n'étaient guère qu'un jeu de salon: la mécanique des fluides avait alors le rôle d'un jouet merveilleusement fascinant, où se reflétaient ensemble, phénomènes naturels et paradoxes plaisants, sous la forme de charmants exercices sur les éléments de la représentation conforme, ou autres du même genre.

Ce qu'il nous faut encore, c'est de savoir comment la masse fluide se répartit parmi les différentes lignes de courant. Nous entendrons donc par une description lagrangienne l'expression d'une mesure  $\mu$  comme mélange de mesures finies positives  $\mu_\alpha$ ,

où chaque  $\mu_\alpha$  s'annule en dehors d'un ensemble orienté  $E_\alpha$  correspondant, et coïncide sur  $E_\alpha$ , avec la longueur des ensembles rectifiables.

Dans la suite nous nous permettrons encore d'interpréter (2.1) dans un sens plus général, en admettant pour  $\nu(x)$  des valeurs qui soient, non plus des vecteurs ordinaires, mais des multivecteurs d'une dimension donnée  $k$  dans l'espace à  $n$  dimensions. Nous supposerons toujours que les valeurs de  $\nu(x)$  sont des multivecteurs simples de grandeur unité, donc qu'elles se laissent exprimer comme le produit extérieur de  $k$  vecteurs  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$  orthogonaux normés, dépendants du point  $x$  considéré. On aura à interpréter  $x'$  comme un jacobien convenable, au lieu d'une dérivée.

En outre, on peut très bien concevoir des cas où  $\nu(x)$  serait multiforme. Nous y reviendrons dans les paragraphes suivants. Par exemple, on peut s'imaginer que le mouvement d'un certain gaz résulte, par une simple superposition, de deux mouvements différents auxquels seraient sujets deux gaz raréfiés. On obtiendrait dans ce cas, à chaque point  $x$ , deux valeurs  $\nu_1(x), \nu_2(x)$  pour la vitesse; on aura alors à leur assigner des poids bien déterminés, qui indiqueront dans quelles proportions la combinaison des deux gaz se dirigera dans les deux directions  $\nu_1(x), \nu_2(x)$ . Plus généralement, on pourra associer, à tout point  $x$ , un ensemble  $V(x)$  de vecteurs ainsi qu'une mesure unité sur cet ensemble: le fluide se dirigera, au point  $x$ , simultanément dans les directions appartenant à  $V(x)$ , dans des proportions déterminées par la mesure-unité correspondante.

### 3. LES VARIÉTÉS DE CONTACT GÉNÉRALES.

Le problème de l'intégration de (2.1), ou du système analogue  $k$ -dimensionnel dans notre espace à  $n$  dimensions, est posé d'une façon nette, lorsqu'on se borne aux variétés paramétriques classiques.

Ce même problème prendra un aspect tout autre, si l'on donne au mot « variété » un sens qui, de nos jours, semble préférable. En effet, cette notion n'est plus alors l'analogie des notions géométriques traditionnelles de courbe et de surface.

Elle correspond plutôt aux notions analytiques fournies par les opérations d'intégration curviligne, ou superficielle. Nous avons le droit d'identifier les courbes et les surfaces avec ces opérations-là, puisque c'est par elles seulement que nous les utilisons en analyse. Et même, ce n'est pas seulement un droit, c'est presque un devoir: il faut éliminer de ces notions ce que nous n'utiliserons pas. Ainsi, une variété moderne sera une fonctionnelle linéaire sur un espace convenable d'intégrants.

Si l'on choisit pour ces derniers les formes différentielles, à  $k$  dimensions dans l'espace à  $n$  dimensions, une fonctionnelle linéaire  $T$  arbitraire sur leur espace, est dite aujourd'hui courant de de Rham, ou simplement, courant. Dans la suite, c'est le seul genre de courant que nous introduirons, et il s'agira surtout des courants bornés, à supports compacts.

Si l'on prend pour intégrants, plus généralement, les fonctions continues  $f$  du point  $x$  et de la direction  $k$ -dimensionnelle  $j$ , c'est-à-dire du multivecteur simple  $k$ -dimensionnel  $j$ , de grandeur unité, dans l'espace à  $n$  dimensions, les fonctionnelles linéaires  $\mathcal{L}$ , telles que  $\mathcal{L}(f) \geq 0$  pour  $f$  non négatif, sont dites variétés  $k$ -dimensionnelles généralisées. La restriction de  $\mathcal{L}$  aux intégrants du type  $f(x, j) = j f(x)$  sera dite son substratum: nous identifions la notion de substratum avec celle d'un courant borné à support compact; cela veut dire, tout simplement, que nous ne distinguons pas entre un intégrant du type  $j f(x)$  et la forme différentielle possédant le même coefficient; d'ailleurs nous ne distinguerons ni l'un ni l'autre, du coefficient  $f(x)$  qui les détermine tous deux, et dont les valeurs sont donc des multivecteurs composés  $k$ -dimensionnels. Notons réciproquement que tout courant borné à support compact se laisse exprimer comme le substratum d'une variété généralisée  $\mathcal{L}$ , qui ne sera d'ailleurs pas unique. On pourra toujours ajouter, par exemple, à  $\mathcal{L}$  une variété généralisée à substratum nul ou, comme nous l'appellerons, une variété singulière.

Il serait commode, à certains égards, d'admettre seuls les intégrants à support compact. Cela conduirait à une notion un peu plus générale de variété. Elle comprendrait, par exemple, celle d'un mouvement fluide stationnaire: en effet, la description eulérienne fournit la fonctionnelle

$$(3.1) \quad \mathcal{L}(f) = \int f[x, v(x)] d\mu,$$

laquelle détermine  $\mu$  de façon unique, et  $v(x)$  sauf dans un ensemble de mesure  $\mu$  nulle. La notion de variété généralisée qu'on obtiendrait ainsi serait même essentiellement équivalente à celle d'un mouvement fluide stationnaire, ou à son analogue  $k$ -dimensionnelle, si l'on se permet de prendre  $v(x)$  multiforme, comme à la fin du paragraphe précédent. La représentation de F. Riesz de la fonctionnelle  $\mathcal{L}$ , transformée par une variante du théorème de Fubini [10], fournit, en effet, une formule analogue à (3.1), dans laquelle l'expression sous le signe de l'intégrale sera remplacée par une valeur moyenne de  $f(x, j)$  par rapport à une mesure-unité, portant sur un ensemble  $V(x)$  de valeurs de  $j$ , au point  $x$ .

Notons que la formule (3.1), ou son analogue plus générale, serviront à définir l'intersection d'une variété généralisée  $\mathcal{L}$  avec un ensemble borélien  $E$  quelconque de l'espace des  $x$ . Il suffit de remplacer l'intégrale sur tout cet espace par celle sur l'ensemble  $E$ . Nous désignerons une telle intersection par  $\mathcal{L} \cap E$ . La mesure  $\mu$  s'obtient en choisissant l'intégrant  $f = 1$ : nous la nommerons, pour des valeurs particulières  $k = 1, k = 2, \dots$ , longueur, aire, ..., et dans le cas général, étendue de  $\mathcal{L} \cap E$ .

Lorsque  $\mu$  s'annule au-dehors d'un seul point  $x_0$ , nous disons que  $\mathcal{L}$  est une micro-variété, concentrée en ce point. La formule analogue à (3.1) peut s'écrire

$$(3.1a) \quad \mathcal{L}(f) = \int \mathcal{M}(f) d\mu$$

où  $\mathcal{M}(f)$  est une micro-variété, concentrée au point  $x$  par rapport auquel nous intégrons. Il va sans dire que  $\mathcal{M}(f)$ , en tant que fonction de  $x$ , aura à remplir des conditions convenables de mesurabilité.

Une variété généralisée  $\mathcal{L}$  sera considérée solution du système (2.1), ou du système analogue  $k$ -dimensionnel, et nous l'appellerons variété de contact de ce système, si la fonctionnelle correspondante ne dépend que des valeurs prises par les intégrants  $f$  aux points  $(x, j)$  de la forme  $[x, v(x)]$ , ou, dans le cas multiforme, aux points  $(x, j)$  tels que  $j \in V(x)$ . En outre, on considérera comme solution un courant  $T$ , borné et à support

compact, et on le nommera courant de contact, si et seulement si,  $T$  est le substratum d'une variété généralisée  $\mathcal{L}$ , telle que  $\mathcal{L}$  soit une solution.

En utilisant encore la représentation de F. Riesz, on détermine sans peine toutes les solutions dans ce sens général: si  $v(x)$  est uniforme, on trouve que  $\mathcal{L}$  sera une solution, si et seulement si, il existe une mesure  $\mu$  telle que  $\mathcal{L}$  soit donné par (3.1). De même,  $T$  sera une solution, si et seulement si,

$$(3.2) \quad T(f) = \int v(x) f(x) d\mu .$$

Dans le cas multiforme, il n'y a qu'à substituer, aux expressions sous les signes d'intégrales dans (3.1) et (3.2), des moyennes  $\mathcal{M}(f)$  convenables, de  $f(x, j)$  ou de  $j f(x)$ , prises au point  $x$  par rapport aux valeurs de  $j$  dans  $V(x)$ . On utilise alors la formule (3.1a).

Or cela signifie que la fonctionnelle  $\mathcal{L}$  ou  $T$  fournit une solution dès qu'elle se laisse déterminer sous la forme (3.1) ou (3.2), par la description eulérienne d'un mouvement fluide stationnaire quelconque, ayant la même vitesse  $v(x)$ , uniforme ou non, que nous interprétons d'une façon convenable dans le cas  $k$ -dimensionnel.

Nous avons donc à identifier tout bonnement les variétés de contact avec les différents mouvements fluides stationnaires de vitesse  $v(x)$ . C'est la solution complète. En sommes-nous plus avancés ?

Serait-ce peut-être une espèce de tautologie ?

En partant d'une description eulérienne, on aboutit à d'autres descriptions du même genre, et nullement à celle de Lagrange. De toutes façons, on ne voit guère comment en tirer les solutions classiques élémentaires.

Il semblerait qu'à force de généraliser la solution, on ait perdu le problème.

En réalité, celui-ci a changé de forme: on le retrouve en demandant quelles solutions ont une structure particulière. On cherchera quelles solutions se réduisent aux solutions classiques ou encore, ce qui nous intéresse davantage, quelles solutions sont capables d'une description lagrangienne. Cette dernière question se rattache donc, d'une façon fondamentale, à la résolution du système (2.1).

#### 4. RÔLE DE LA FRONTIÈRE.

Nous avons retrouvé, sous une forme nouvelle, un fait bien connu: c'est que la solution générale d'un système d'équations différentielles n'est que le premier pas dans l'étude de ce système. Un des éléments les plus importants d'une telle étude sera le rôle de la frontière. Celle-ci ne peut être entièrement prescrite, dans le cas qui nous occupe, d'un système du premier ordre, mais on peut lui imposer certaines conditions restrictives, par exemple des conditions initiales. On peut aussi lui imposer des conditions qui n'ont rien de numérique, et de telles conditions sont précisément sous-entendues dans toute l'Analyse classique. Pour  $k = 1$ , il était coutume de n'admettre que des frontières se réduisant à deux extrémités, donc à un seul cycle. L'analogie avec la situation pour  $k > 1$  en souffrait: car dans celle-ci les nécessités géométriques avaient bientôt forcé l'admission des frontières formées d'un nombre fini quelconque de cycles.

Or ces frontières-là sont encore très particulières. Il est malcommode d'avoir à se borner à elles, car déjà l'intersection d'un demi-espace avec une variété très simple n'aura pas toujours une telle frontière. C'est l'intuition géométrique qui servait à faire définir la notion de frontière, et c'est d'elle que nous viennent de pareilles restrictions. Elles n'ont plus la même raison d'être dans une théorie abstraite.

La frontière d'une variété généralisée  $\mathcal{L}$ , ou d'un courant  $T$ , se laisse définir sans qu'il soit besoin de recourir à des hypothèses simplificatrices. On la définit comme la restriction de la fonctionnelle  $\mathcal{L}(f)$ , ou  $T(f)$ , à une sous-classe bien déterminée d'intégrants, ou de formes différentielles,  $f$ : celle dont les membres sont exacts. On appelle exacte une forme  $k$ -dimensionnelle qui se laisse exprimer comme la différentielle  $dg$  d'une forme  $g$  de dimension  $k - 1$ . Des formes exactes, on passe d'une manière évidente aux intégrants exacts, la distinction étant purement verbale. Si les formes  $f, g$  sont sujettes à la relation  $f = dg$ , on dira des intégrants  $f_0, g_0$  correspondants que  $f_0$  est la dérivée  $Dg_0$  de  $g_0$ .

Puisque nous possédons, maintenant, une définition de la frontière tout à fait générale, nous sommes à même de nous

passer des hypothèses mal commodes, et plus ou moins implicites, de l'Analyse classique. Néanmoins, parmi les solutions, si générales, de (2.1) ou de son analogue  $k$ -dimensionnelle, il va falloir étudier celles qui possèdent une frontière pas trop irrégulière, que nous nommerons frontière  $A$ .

Une frontière  $A$  est, par définition, la frontière d'un  $\sigma$ -polytope avec poids, c'est-à-dire celle d'une variété généralisée  $\mathcal{L}$  se laissant exprimer comme une somme au plus dénombrable  $\sum c_\nu \mathcal{L}_\nu$ , où les  $c_\nu$  sont réels et positifs — ce sont eux que nous appelons les poids — et où chaque  $\mathcal{L}_\nu$  est une fonctionnelle  $\mathcal{L}_\nu(f)$  définie par une intégrale  $k$ -dimensionnelle de  $f$  sur un simplex orienté, de même dimension. A la place de  $\sigma$ -polytope avec poids, nous dirons  $\sigma$ -polytope (tout court), lorsque les  $c_\nu$  sont des entiers; en outre, nous omettrons le préfixe  $\sigma$  lorsque la somme  $\sum c_\nu \mathcal{L}_\nu$  est finie.

Les notions classiques de frontière peuvent être considérées comme des cas particuliers d'une frontière  $A$ . Ce ne sont pas les seules: chaque espèce de frontière qu'on ait admise jusqu'ici, dans la théorie des équations différentielles ou dans le calcul des variations, peut être regardée comme un cas particulier, soit d'une frontière  $A$ , soit, dans certains contextes, d'une classe de frontières  $A$ . En outre, nous avons montré ailleurs [12] que les frontières  $A$  constituent un espace linéaire métrisable complet, et que les variétés généralisées, à frontière  $A$ , constituent la fermeture, dans une topologie métrique convenable, de la classe des polytopes avec poids, ou ce qui revient au même, la hulle convexe de la classe des polytopes, ou polyèdres ordinaires.

Dans le même travail, nous avons démontré une propriété des frontières  $A$  qui sera pour nous décisive, puisque nous allons envisager les solutions lagrangiennes comme des mélanges de solutions plus simples. D'après ce qui a été dit, ces solutions plus simples auront sans doute des frontières  $A$ , sans quoi leur simplicité serait illusoire. Or nous avons montré [12 Ap. III] que la propriété de posséder une frontière  $A$  se conserve sous l'opération du mélange. Il s'en suivra que les solutions lagrangiennes devront posséder une frontière  $A$ .

C'est la réciproque que nous voudrions étudier: les solutions de frontière  $A$  sont-elles lagrangiennes ?

## 5. LES VARIÉTÉS DE CONTACT INTÉGRALES.

Avant d'étudier les solutions lagrangiennes, il faut les définir, et puisqu'il s'agira de mélanges de solutions plus simples, ce sont ces dernières dont nous parlerons d'abord. Nous introduirons des notions se rapprochant davantage des solutions classiques de (2.1).

Nous appellerons représentation paramétrique lipschitzienne biunivoque en pointillé, ou simplement représentation en pointillé, une application biunivoque lipschitzienne  $x(\omega)$  d'un ensemble compact  $W_0$  de l'espace à  $k$  dimensions sur un ensemble  $X_0$  de l'espace à  $n$  dimensions. Parfois nous supprimerons les mots « en pointillé », mais seulement dans le cas où  $W_0$  est un ensemble particulièrement simple.

Supposons donnée une représentation en pointillé, et désignons par  $J(\omega)$  le jacobien de la fonction correspondante  $x(\omega)$ , c'est-à-dire que  $J(\omega)$  sera le produit extérieur des vecteurs qui constituent les dérivées partielles du vecteur  $x(\omega)$ . Soient  $W$  l'ensemble des  $\omega \in W_0$  tels que  $J(\omega)$  existe sans s'annuler, et  $X$  l'image de  $W$  résultant de l'application  $x(\omega)$ . En outre, soient  $\mu$  la mesure  $k$ -dimensionnelle sur  $X$ , et  $j(x)$  la valeur du quotient  $J(\omega)/|J(\omega)|$  au point  $\omega \in W$  tel que  $x(\omega) = x$ .

On dira, d'une variété généralisée  $k$ -dimensionnelle  $\mathcal{L}$ , qu'elle possède la représentation en pointillé  $x(\omega)$ , si la fonctionnelle  $\mathcal{L}(f)$  est donnée, pour tout intégrant  $f(x, j)$ , par la formule

$$(5.1) \quad \mathcal{L}(f) = \int_X f[x, j(x)] d\mu ;$$

et plus généralement, que  $\mathcal{L}$  possède cette représentation  $m$  fois, où  $m$  est un entier positif, si

$$(5.2) \quad \mathcal{L}(f) = m \int_X f[x, j(x)] d\mu .$$

Nous nommerons variété  $B$  une variété généralisée se laissant exprimer comme une somme, dénombrable au plus, de termes  $\mathcal{L}$ , chacun desquels possède une représentation en pointillé correspondante  $x(\omega)$ . Si cette variété  $B$  est une variété de contact du système (2.1), ou du système analogue à  $k$  dimensions, nous la

nommerons variété de contact intégrale. Plus généralement, nous nommerons variété généralisée  $B$ , une variété généralisée dont le substratum est celui d'une variété  $B$ ; si une variété généralisée  $B$  est de contact, nous la nommerons variété de contact à substratum  $B$ .

C'est dans le cas multiforme que de telles variétés se présenteront. Elles jouent un rôle important dans un bon nombre de problèmes classiques, qui sans elles seraient insolubles. Les courbes généralisées du calcul des variations sont un cas particulier [7, 6]; rappelons leur origine.

Supposons qu'on demande le trajet le plus rapide pour une barque à voiles, descendant contre le vent le cours d'un fleuve de  $P$  à  $Q$ ; admettons que le vent soit constant, et directement opposé à  $PQ$ , tandis que la vitesse du fleuve serait constante seulement sur le segment  $PQ$ , et qu'elle y atteindrait son maximum, sa direction étant alors celle de  $PQ$ . On voit tout de suite que la solution ne peut être une courbe traditionnelle: ce sera une courbe généralisée. On peut se l'imaginer comme un chemin qui suit le segment  $PQ$ , mais avec des zig-zags infiniment petits. En chaque point de  $PQ$ , la barque se dirigerait, pour un instant, d'abord dans une certaine direction  $\theta$ , et ensuite dans la direction symétrique  $\theta^*$ . La longueur  $ds$  sur un tel chemin se distingue par un facteur constant de la longueur sur  $PQ$ . Plus généralement, l'intégrale d'une fonction  $f(x, x')$  prendra la forme

$$(5.3) \quad \mathcal{L}(f) = \int \left\{ \frac{1}{2} f(x, \theta) + \frac{1}{2} f(x, \theta^*) \right\} ds .$$

Or c'est la fonctionnelle (5.3) qui sert de définition à notre solution. Par conséquent cette solution existe.

## 6. LES MICROSTRUCTURES GREFFABLES.

Nous appellerons schéma de Gauss d'une variété généralisée  $\mathcal{L}$  la restriction de la fonctionnelle  $\mathcal{L}(f)$  aux intégrants  $f(j)$  indépendants de  $x$ . Deux variétés généralisées, qui possèdent le même schéma de Gauss, seront dites parallèles. En particulier, une variété généralisée est parallèle à une microvariété, concen-

trée en un point donné  $x_0$ . On la définit en écrivant, pour tout intégrant  $f(x, j)$ ,

$$\mathcal{M}(f) = \mathcal{L}(f_0) \quad \text{où} \quad f_0(x, j) = f(x_0, j).$$

Il est clair que le schéma de Gauss de  $\mathcal{L}$ , et la microvariété parallèle concentrée en un point donné, se déterminent mutuellement. Nous appellerons donc cette dernière le schéma de Gauss de  $\mathcal{L}$  au point donné.

D'autre part, nous avons associé à la variété généralisée  $\mathcal{L}$ , par la formule (3.1a) une autre microvariété  $\mathcal{M}(f)$ , concentrée en un point  $x_0$ . Nous l'appellerons microstructure de  $\mathcal{L}$  en ce point. Rappelons que cette microstructure est d'étendue unité, et qu'elle est définie presque partout pour la mesure  $\mu$  qui intervient dans notre formule.

Ainsi les microvariétés joueront un rôle double : d'une part le rôle de schémas de Gauss, et d'autre part celui de microstructures.

A côté des restrictions à des classes d'intégrants  $f$  particulières, qui nous ont servi à définir successivement le substratum, la frontière, et maintenant le schéma de Gauss, on peut considérer la restriction à leur partie commune. Or cette partie commune se compose d'intégrants de la forme  $f(x, j) = aj$  où  $a$  désigne un multivecteur composé quelconque. La restriction correspondante d'une fonctionnelle linéaire  $\mathcal{L}(f)$  prendra la forme  $aJ$ , où  $J$  désigne un multivecteur composé, que nous nommerons le flux de  $\mathcal{L}$ , ou de son substratum, ou de sa frontière, ou encore de son schéma de Gauss. Les composantes du flux de  $\mathcal{L}$  seront les valeurs prises par  $\mathcal{L}(f)$  pour les intégrants  $f(j)$ , se réduisant aux composantes de  $j$ . En particulier le flux d'une variété généralisée  $\mathcal{L}$  sera dit résultante de  $\mathcal{L}$  s'il se réduit à un multivecteur simple. Nous parlerons de même de la résultante de son substratum, de sa frontière, ou de son schéma de Gauss.

Dans la suite, nous aurons surtout affaire à des schémas de Gauss de types particuliers.

Nous appellerons micropolytope le schéma de Gauss, en un point donné, d'un polytope quelconque  $\mathcal{P}$ . Un tel micropolytope aura donc une résultante si  $\mathcal{P}$  en a une, ou, ce qui revient au même, si la frontière de  $\mathcal{P}$  en a une. Ce sera certainement le cas

s'il existe un entier non négatif  $m$  et un simplex  $\Delta$ , tels que  $\mathcal{P}$  ait la même frontière que  $m\Delta$ : nous dirons alors que  $\mathcal{P}$  possède un orifice simplicial  $m$  fois superposé et le schéma de Gauss d'un tel polytope en un point donné sera dit micropolytope,  $m$  fois greffable, de Klein, par analogie avec la bouteille de Klein bien connue en topologie élémentaire.

On peut s'imaginer une opération qui consisterait à greffer sur les simplex infinitésimaux  $\Delta$  d'une variété  $m$  fois superposée, des polytopes  $\mathcal{P}$  infinitésimaux tels que celui de tout à l'heure. C'est une opération toute semblable à celle utilisée au paragraphe précédent pour passer du segment  $PQ$  à la courbe généralisée (5.3).

Plus généralement, une microvariété  $\mathcal{M}$  concentrée au point  $x_0$  sera dite  $m$  fois greffable, si l'on a

$$(6.1) \quad \mathcal{M} = \lim \mathcal{M}_\nu,$$

où chaque  $\mathcal{M}_\nu$  est un micropolytope,  $m$  fois greffable, de Klein, concentrée au même point. Nous utilisons ici la limite faible: c'est-à-dire que  $\mathcal{M}(f) = \lim \mathcal{M}_\nu(f)$  pour tout intégrant  $f$ , ou ce qui revient au même dans le cas des microvariétés concentrées en un même point  $x_0$ , pour chaque intégrant  $f$  de la forme  $f(j)$ , indépendant de  $x$ . Notons que dans le cas  $m = 0$  une microvariété  $m$  fois greffable se réduit à une microvariété singulière, et vice versa. Cela résulte de théorèmes sur les systèmes de multivecteurs, que nous avons démontrés ailleurs [13 III]. Dans le cas général, les microvariétés  $m$  fois greffables rentrent dans la classe plus large des microvariétés possédant une résultante, mais on manque encore d'informations sur le rôle qu'elles y jouent.

D'après [13 III], en ajoutant à un micropolytope, qui possède une résultante, un micropolytope singulier convenable, d'étendue aussi petite que l'on veut, on peut toujours le transformer en un micropolytope,  $m$  fois greffable, de Klein, pour une valeur appropriée de  $m$ . Par contre, lorsqu'il s'agit d'une microvariété possédant une résultante, on ignore en général si l'addition d'une microvariété singulière convenable, d'étendue arbitrairement petite, conduira pour une valeur correspondante de  $m$ , à une microvariété  $m$  fois greffable. Ce qu'on peut déduire du résultat que nous venons de citer, c'est qu'une telle addition

pourra toujours conduire à une microvariété  $\mathcal{M}$  possédant la propriété suivante:  $\mathcal{M}$  se laisse exprimer comme un mélange de micropolytopes  $\mathcal{M}_\alpha$ , où chaque  $\mathcal{M}_\alpha$  est  $m$  fois greffable, et où l'entier  $m$  et la résultante de  $\mathcal{M}_\alpha$  sont indépendants de  $\alpha$ .

## 7. LES VARIÉTÉS GREFFÉES.

Nous dirons d'une variété généralisée  $\mathcal{L}$  qu'elle possède une représentation en pointillé  $x(\omega)$ , greffée  $m$  fois, si  $\mathcal{L}$  a la forme (3.1) $a$ , où la microstructure  $\mathcal{M}$  est  $m$  fois greffable, et si, de plus,  $\mathcal{L}$  a le même substratum qu'une variété généralisée, possédant, au sens du paragraphe 5,  $m$  fois la représentation en pointillé  $x(\omega)$ . Remarquons que pour  $m = 0$  l'application  $x(\omega)$  ne joue aucun rôle, et que les variétés généralisées  $\mathcal{L}$  qui possèdent une telle représentation greffée  $m$  fois, se réduisent alors aux variétés singulières.

Nous nommerons variété greffée, une variété généralisée  $\mathcal{L}$  se laissant exprimer comme une somme, dénombrable au plus, de termes  $\mathcal{L}_\nu$ , chacun desquels possède, pour un  $m_\nu$  correspondant, une représentation en pointillé  $x_\nu(\omega)$  correspondante, greffée  $m_\nu$  fois. Si  $\mathcal{L}$  est de contact, nous la nommerons variété de contact greffée.

Dans [12], les variétés greffées sont dites variétés généralisées admissibles  $B$ . Nous y avons démontré qu'elles constituent la fermeture, dans un certain sens, des polytopes, et c'est dans ce même sens que la courbe généralisée (5.3) se laisse approcher par des zigzags finis. A cet égard, ce sont les variétés greffées, plutôt que les variétés généralisées  $B$ , qui auront à jouer, vis-à-vis des variétés  $B$ , le rôle analogue aux courbes généralisées, vis-à-vis des courbes rectifiables.

Ce qui nuit un peu à cette analogie, c'est qu'elle ne tient pas compte d'effets très différents que peut produire l'addition d'une variété singulière<sup>1</sup>. Ce n'est là qu'une partie des complications

---

<sup>1</sup>) Après une telle addition, les variétés greffées restent variétés greffées, les variétés généralisées  $B$  restent variétés généralisées  $B$ , tandis que les courbes généralisées n'ont pas la propriété analogue. La même opération peut aussi, cas échéant, transformer en variété greffée, une variété généralisée  $B$ , tout comme elle peut changer radicalement le caractère d'une variété, même très simple, en topologie élémentaire: un tore devient du type de la sphère, quand on ajoute une paire convenable de disques superposés, d'orientations opposées.

qui se présentent, pour  $2 \leq k \leq n - 2$  surtout: d'ailleurs, pour  $k = 1$ , on pourra y chercher l'explication mathématique de phénomènes de turbulence.

Les variétés greffées sont évidemment un cas particulier des variétés généralisées  $B$ . Nous ne possédons, à vrai dire, pas d'exemple de variété généralisée  $B$  non greffée. Un tel exemple existe probablement: nous avons récemment résolu affirmativement une question dans le même ordre d'idées [21 V]. D'autre part, en utilisant la remarque à la fin du paragraphe précédent, on peut démontrer qu'en ajoutant, à une variété généralisée  $B$ , une variété singulière d'étendue aussi petite que l'on voudra, on aboutit à un mélange de variétés greffées.

## 8. LES VARIÉTÉS DE CONTACT LAGRANGIENNES.

Il serait bon que nous précisions la notion de mélange. Nous nous permettrons donc d'intercaler quelques remarques qui se rapportent à nos conventions de mesurabilité. Soit  $A$  un ensemble de variétés généralisées  $\mathcal{L}_\alpha$ ; nous conviendrons de considérer les suffixes  $\alpha$  comme des étiquettes pour distinguer les  $\mathcal{L}_\alpha$  dans  $A$ , et nous désignerons par  $d\alpha$  une mesure dans  $A$ , ou, ce qui revient au même, dans l'espace des étiquettes  $\alpha$ . Une variété généralisée se laissant exprimer sous la forme

$$(8.1) \quad \mathcal{L}(f) = \int \mathcal{L}_\alpha(f) d\alpha,$$

sera dite mélange des  $\mathcal{L}_\alpha$ , ou mélange de  $A$ . Or nous avons convenu de ne considérer que des ensembles boréliens, ce qui présuppose une topologie.

Expliquons-nous.

Nous allons voir dans un instant qu'on peut se borner aux variétés généralisées situées dans un cube fixe, c'est-à-dire qui ont une intersection nulle avec le complément de ce cube<sup>1</sup>. L'espace de telles variétés généralisées sera doué de la topologie faible en ce qui concerne la convergence des suites: on dit que la suite  $\mathcal{L}_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) converge si celle des valeurs  $\mathcal{L}_\nu(f)$  converge pour chaque intégrant  $f$ . Cette topologie est équivalente

1) Plus généralement, nous dirons d'une variété généralisée  $\mathcal{L}$  qu'elle possède un support borélien  $E$  dans l'espace des  $\alpha$ , si son intersection avec le complément s'annule.

à celle d'une métrique particulière, que nous appellerons métrique de McShane: sa définition se calque sur [6, p. 534]. Nous n'utiliserons cette métrique ici guère que pour en tirer la notion d'ensemble borélien et celles de mesurabilité, etc., que nous avons convenu de sous-entendre: donc, n'en parlons plus.

D'accord avec la topologie faible, la formule (8.1) signifie

$$\mathcal{L}(f) = \int \mathcal{L}_\alpha(f) d\alpha,$$

pour chaque intégrant  $f$ . Puisque  $\mathcal{L}$  est situé dans un cube fini [8 (3.1)], presque chaque  $\mathcal{L}_\alpha$  sera situé dans ce même cube. On pourra donc se borner à la partie de  $\mathcal{A}$  qui comprend des variétés généralisées situées dans ce cube.

Cela étant, nous dirons d'une variété généralisée  $\mathcal{L}$  qu'elle est, par rapport à  $\mathcal{A}$ , lagrangienne, si elle se laisse exprimer sous la forme (8.1), c'est-à-dire comme un mélange de  $\mathcal{A}$ . Dans le cas où, pour la mesure  $d\alpha$ , les membres  $\mathcal{L}_\alpha$  de  $\mathcal{A}$ , sauf ceux d'une sous-classe éventuelle de mesure  $d\alpha$  nulle, possèdent des supports boréliens disjoints,  $\mathcal{L}$  sera dite, par rapport à  $\mathcal{A}$ , lagrangienne par décomposition.

Nous écrirons  $A(\mathcal{A})$ ,  $A_d(\mathcal{A})$  respectivement, pour les classes de variétés généralisées, qui sont, par rapport à  $\mathcal{A}$ , lagrangiennes, ou lagrangiennes par décomposition. Nous dirons simplement: variété lagrangienne, variété lagrangienne par décomposition, lorsque  $\mathcal{A}$  se réduit à la classe des variétés  $B$ . Les classes correspondantes seront désignées par  $A$ ,  $A_d$ . Dans le cas d'une variété de contact, nous dirons variété de contact lagrangienne, etc. Nous dirons aussi variété non lagrangienne, etc., pour une variété généralisée qui ne possède pas la propriété lagrangienne correspondante, et variété lagrangienne généralisée, etc., lorsque  $\mathcal{A}$  est la classe des variétés généralisées  $B$ : dans ce dernier cas, nous écrirons  $A_G$ ,  $A_{Gd}$  pour  $A(\mathcal{A})$ ,  $A_d(\mathcal{A})$ . Nous dirons encore variété lagrangienne greffée, etc., lorsque  $\mathcal{A}$  est la classe des variétés greffées, et nous écrirons dans ce cas, pour les deux classes obtenues,  $A_g$ ,  $A_{gd}$ .

Nous dirons enfin, en abrégé au besoin comme ci-dessus, que  $\mathcal{L}$  est, par rapport à  $\mathcal{A}$ , presque lagrangienne, et nous remplacerons dans les classes correspondantes  $A$  par  $A^+$ , s'il existe, pour tout  $\varepsilon$  positif, une variété singulière  $S_\varepsilon$ , dont l'étendue est

inférieure à  $\varepsilon$ , telle que  $\mathcal{L} + S_\varepsilon$ , soit, par rapport à  $A$ , lagrangienne.

Désignons, pour une classe quelconque  $\mathcal{K}$  de nos variétés généralisées, par  $\tau\mathcal{K}$ ,  $\partial\mathcal{K}$  les classes correspondantes de substrata  $\tau\mathcal{L}$ , et de frontières  $\partial\mathcal{L}$ , de membres  $\mathcal{L}$  de  $\mathcal{K}$ . Les expressions  $\tau^{-1}\tau\mathcal{K}$ ,  $\partial^{-1}\partial\mathcal{K}$  désigneront les classes de variétés généralisées chacune desquelles a le même substratum, ou la même frontière, qu'un membre correspondant de  $\mathcal{K}$ .

Nous aurons les inclusions suivantes:

$$(8.2) \quad A_\alpha \subset A \subset A_g \subset A_G \subset A_G^+ \subset \tau^{-1}\tau A_G^+ \subset \partial^{-1}\partial A_G^+.$$

Or, on remarque de suite que

$$(8.3) \quad \tau^{-1}\tau A_G^+ = \tau^{-1}\tau A, \quad \partial^{-1}\partial A_G^+ \partial = \partial^{-1}\partial A,$$

et que, d'après ce qui a été dit à la fin du paragraphe 4, la classe  $\partial^{-1}\partial A$  est celle des variétés généralisées qui possèdent une frontière  $A$ , c'est-à-dire les mêmes frontières que des  $\sigma$ -polytopes avec poids. Quant à la classe  $\tau^{-1}\tau A$ , nous dirons pour abrégier que ses membres sont les variétés à substratum lagrangien. Cette classe n'est pas universelle: elle est comprise dans la classe des variétés généralisées de frontière  $A$ , et l'on remarquera qu'il existe des variétés généralisées sans frontière  $A$ , par exemple la variété généralisée  $\mathcal{L}$  définie par la fonctionnelle  $\mathcal{L}(f) = f(x_0, j_0)$  où  $x_0, j_0$  désignent un point et un multivecteur fixes. (On supposera  $j_0$  simple et de grandeur unité.) Ainsi il existe certainement des variétés à substratum non lagrangien: pour le mouvement des fluides, on constate donc que la description eulérienne est bien plus générale que celle de Lagrange; nous reviendrons cependant sur cette question dans le paragraphe suivant.

Remarquons encore, d'après ce qui a été dit à la fin du paragraphe précédent, que

$$(8.4) \quad A_G^+ = A_g^+.$$

Nous pouvons donc récrire (8.2), en lui ajoutant quelques inclusions évidentes, comme suit:

$$(8.5) \quad \left. \begin{array}{l} A_d \subset A \subset A_g \\ A_d \subset A_{gd} \subset A_g \end{array} \right\} \subset A_G \left\{ \begin{array}{l} \\ A_{gd} \subset A_{Gd} \subset A_G \end{array} \right\} \subset A_g^+ \subset \tau^{-1}\tau A \subset \partial^{-1}\partial A$$

On remarquera sans peine que certaines des inclusions (8.5) sont strictes, mais il est possible que d'autres se réduisent à des égalités.

Les mêmes inclusions sont encore valables, si l'on désigne par les symboles  $A_d$ ,  $A$ ,  $A_g$ , etc., les classes correspondantes de variétés de contact d'un système donné d'équations différentielles de la forme (2.1), ou d'un système analogue  $k$ -dimensionnel.

Pour bien comprendre un tel système, et pour bien comprendre la notion de variété, au sens généralisé que nous utilisons ici, il faudra avant tout, selon la remarque à la fin du paragraphe 3, étudier la question de savoir quelles inclusions (8.5) se réduisent peut-être à des égalités. Par exemple, l'égalité  $\partial_g^+ = A^{-1} \partial A$  signifierait, pour les variétés de contact, que toute solution de frontière  $A$  de (2.1) se réduit à une variété de contact, presque lagrangienne, greffée. Ensuite, pour les inclusions strictes, on cherchera à caractériser chaque fois les membres de la classe étroite parmi ceux de la classe large.

## 9. L'ÉQUATION DE CONTINUITÉ DES FLUIDES.

C'est d'abord l'inclusion finale de (8.5) qui nous intéresse. Se réduirait-elle à une égalité ?

Pour simplifier, bornons-nous aux variétés généralisées closes faisant partie des classes considérées. Cette réduction n'est possible, à vrai dire, que pour  $k < n$ , nous y reviendrons après ce paragraphe. Rappelons qu'une variété généralisée est dite close, lorsque sa frontière s'annule.

La question que nous nous sommes posée devient la suivante: une variété généralisée close a-t-elle le même substratum qu'une variété lagrangienne ? En d'autres termes: un substratum clos est-il lagrangien ? Nous allons donner à cette question une autre forme, qui nous rapproche encore de la mécanique classique des fluides.

Nous aurons besoin de quelques notations.

Nous utiliserons pour la multiplication extérieure des multivecteurs le signe  $\times$ . On définit alors la comultiplication  $\otimes$  par la formule  $a \otimes b = (a^* \times b)^*$ , où l'astérisque désigne la normale. Rappelons que la normale  $a^*$  d'un  $k$ -vecteur  $a$  se définit

comme un  $(n - k)$ -vecteur de même grandeur, tel que l'on ait  $a \times a^* = |a|^2$ . (Il serait plus correct d'écrire au côté gauche  $(a \times a^*)^*$ , car on distingue entre une quantité scalaire, appelée  $O$ -vecteur, et un  $n$ -vecteur, qu'on nomme également pseudo-scalaire. La normale d'une quantité scalaire sera pseudo-scalaire, et vice versa.) Pour le rôle de ces opérations dans la théorie des variétés généralisées, on consultera [11].

Nous écrirons encore  $\partial^+/\partial x$  et  $\partial^-/\partial x$  pour le vecteur dont les composantes sont les opérations de dérivation partielle, agissant sur ce qui suit, ou sur ce qui précède, le vecteur en question. Nous poserons

$$\text{rot } Q = \frac{\partial^+}{\partial x} \times Q, \quad \text{div } Q = Q \otimes \frac{\partial^-}{\partial x},$$

où  $Q$  désigne une fonction  $Q(x)$  dont les valeurs sont des multivecteurs composés. On écrit grad au lieu de rot, si  $Q$  se réduit à une fonction scalaire. On notera la formule

$$(9.1) \quad \text{div}(Q \otimes Q') = (-)^{k'} \{Q \otimes \text{rot } Q' + (\text{div } Q) \otimes Q'\},$$

où  $Q, Q'$  désignent des fonctions dont les valeurs sont des multivecteurs composés, et où  $k'$  désigne la dimension de  $Q'$ . En particulier, si l'on prend pour  $Q'$  une fonction scalaire  $\rho$ , on aura

$$(9.2) \quad \text{div}(\rho Q) = Q \otimes \text{grad } \rho + \rho \text{div } Q$$

Rappelons encore une conséquence de la formule (9.1) dans la théorie des distributions et des courants. Nous désignerons à cet effet par  $k$  la dimension de  $Q$  et nous poserons  $k' = k - 1$ . Nous supposerons en outre que  $Q'$  soit infiniment différentiable, et nous l'identifierons, comme nous l'avons convenu plus haut, avec une  $(k - 1)$ -forme  $g$ . On peut alors prendre pour  $Q$  une distribution dont les valeurs sont des multivecteurs, de sorte que  $Q$  devient un courant  $T$  de dimension  $k$ . Nous supposerons encore que l'une des quantités  $T, g$  au moins ait un support compact. En écrivant  $S = \text{div } T$ , et en tenant compte du fait que, dans la théorie des distributions, l'intégrale (sur tout l'espace) d'une divergence à support compacte s'annule, on trouve

$$O = T(\text{rot } g) + S(g).$$

Ici le symbole  $\text{rot } g$  est à proprement parler inexact, car c'est pour la fonction  $Q'$  plutôt que pour la forme  $g$  que nous avons défini l'opération  $\text{rot}$ . Dans la théorie des formes différentielles, on écrit  $dg$  et non  $\text{rot } g$ . La formule devient

$$(9.3) \quad O = T(dg) + S(g);$$

elle sert de définition pour la fonctionnelle  $S(g)$ , donc pour le courant  $S$ , puisque  $g$  y désigne une  $(k-1)$ -forme arbitraire. D'autre part,  $dg$  désigne une forme exacte arbitraire, et la fonctionnelle  $T(dg)$  définit la frontière de  $T$ . Ainsi: les courants  $T$  clos sont ceux qui vérifient l'équation  $S = 0$ , c'est-à-dire

$$(9.4) \quad \text{div } T = 0.$$

Supposons, en particulier, que  $T$  soit borné et à support compact, c'est-à-dire que  $T$  soit un substratum. La fonctionnelle  $T(f)$  sera alors de la forme analogue à (3.2)

$$(9.5) \quad T(f) = \int Q(x) f(x) d\mu,$$

où  $Q$  désigne une fonction dont les valeurs sont des  $k$ -vecteurs composés, que nous supposerons de grandeur unité, et où  $d\mu$  désigne une mesure. La forme  $f$  a été remplacée ici, selon notre coutume, par la fonction correspondante à valeurs  $k$ -vectorielles, définie par ses coefficients. Or on écrit plutôt, dans la théorie des distributions, pour  $d\mu$ , l'expression  $\rho dx$  où  $dx$  est la mesure ordinaire dans l'espace des  $x$ , et où  $\rho$  est une distribution que nous nommerons la densité. On écrira alors  $T = \rho Q$ , ce qui signifie en effet,

$$(9.6) \quad T(f) = \int Q(x) \rho(x) f(x) dx,$$

selon les conventions de la théorie des distributions.

En interprétant la fonction  $Q(x)$  à valeurs  $k$ -vectorielles comme une généralisation de la vitesse d'un fluide stationnaire de densité  $\rho(x)$ , on voit qu'un substratum clos, c'est-à-dire le substratum d'une variété généralisée close, vérifie la même équation de continuité que l'on trouve en mécanique des fluides pour le cas stationnaire:

$$(9.7) \quad \text{div } (\rho Q) = 0$$

Il y a cependant une légère différence. Ici l'équation a un sens global, et les deux facteurs  $\rho$  et  $Q$  sont à prendre ensemble: on ne les sépare pas comme au côté droit de (9.2) parce que la multiplication des distributions nécessite quelques précautions. Dans la mécanique classique des fluides  $\rho$  et  $Q$  sont analytiques et ces précautions deviennent superflues. De plus, l'équation (9.7) a alors un sens local, et se trouve vérifiée à l'intérieur d'un fluide.

Puisque nous renonçons ici aux hypothèses d'analyticité, la seule différence qui subsistera concernera ce caractère local. Nous considérerons donc une famille de substrata qui sera plus générale que celle des substrata clos; ses membres seront donnés par les quantités  $\rho$ ,  $Q$  comme plus haut, mais l'équation de continuité (9.7) sera supposée vérifiée localement.

On dit qu'une distribution  $S$  s'annule dans le voisinage du point  $x_0$ , s'il existe une fonction  $h(x)$ , infiniment différentiable et non négative, telle que l'on ait  $h(x) = 1$  dans un voisinage de  $x_0$ , et  $hS = 0$ . Nous dirons que notre courant  $T = \rho Q$  vérifie (9.7) localement, si sa divergence s'annule au voisinage de tout point d'un ouvert  $G$ , tel que  $G$  constitue pour  $T$ , c'est-à-dire pour la mesure définie par  $\rho$ , un support borélien.

Remarquons que de l'équation de continuité (9.7), on peut déduire d'autres du même genre, par l'intermédiaire de (9.1). En effet, si l'on remplace dans cette dernière,  $Q$  par  $T$ , et si l'on y choisit pour  $Q'$  un multivecteur constant, ou plus généralement un multivecteur  $Q'(x)$  dont la rotation s'annule, on trouvera

$$(9.8) \quad \operatorname{div}(\rho\varrho) = 0$$

où  $\varrho = Q \otimes Q'$ . En particulier, si la dimension de  $Q'$  est  $(k - 1)$ , où  $k$  est celle de  $Q$ , l'expression  $\varrho$  sera un vecteur ordinaire, et (9.8) se réduit à l'équation de continuité d'un fluide stationnaire ordinaire.

La question du début de ce paragraphe est devenue la suivante: un courant de la forme  $T = \rho Q$  non lagrangien peut-il vérifier l'équation de continuité (9.7)? Peut-il la vérifier, sinon globalement, au moins localement? Peut-il enfin vérifier l'équation de continuité ordinaire (9.8) pour  $\varrho = Q \otimes Q'$ , et pour chaque choix constant de  $Q'$  de dimension  $(k - 1)$ ?

Nous retrouvons ainsi, sous des formes plus précises, la question de la mécanique des fluides dont nous étions partis. A cet effet, on prendra pour  $T$  le substratum d'une variété de contact.

#### 10. LES DIRECTIONS D'AMARREMENT.

Pour bien comprendre l'équation (9.8), à laquelle nous sommes aboutis, nous aurons besoin d'un lemme assez simple sur les multivecteurs quelconques, et ce lemme va dépendre d'une définition que nous allons illustrer par une image nautique.

Un bateau, qui entre dans un port, ne peut s'amarrer que dans certaines directions « d'amarrement ». L'ensemble des directions d'amarrement dépendra évidemment de celui des jetées non parallèles qu'on aura construit dans le port.

Nous définirons de même les directions d'amarrement d'un multivecteur quelconque  $j$ , et l'ensemble de ces directions dépendra des multivecteurs simples qui sont nécessaires pour représenter  $j$  comme leur somme.

Si  $j$  est un multivecteur simple non nul, on l'exprime comme produit extérieur de vecteurs  $j = \varrho_1 \times \varrho_2 \times \dots \times \varrho_k$  et l'on nomme direction d'amarrement de  $j$  toute direction qui est celle d'une combinaison linéaire  $\varrho = \Sigma c_\sigma \varrho_\sigma$ , à coefficients réels  $c_\sigma$ , des vecteurs  $\varrho_\sigma$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, k$ ). Une telle combinaison linéaire sera elle-même dite vecteur d'amarrement.

Dans le cas général, où  $j$  est composé, on dira d'un vecteur  $\varrho$ , ou d'une direction  $\varrho$ , que c'est un vecteur, ou une direction, d'amarrement de  $j$ , si pour chaque décomposition  $j = \Sigma j_\nu$  de  $j$  comme une somme de multivecteurs simples  $j_\nu$ , qu'on aura exprimés comme produits extérieurs de vecteurs  $\varrho_{\nu 1}, \varrho_{\nu 2}, \dots, \varrho_{\nu k}$ , correspondants, il existe une expression de  $\varrho$  comme une combinaison linéaire  $\varrho = \Sigma_{\nu, \sigma} c_{\nu \sigma} \varrho_{\nu \sigma}$ , des différents vecteurs  $\varrho_{\nu \sigma}$ .

Nous dirons encore que le multivecteur  $j$  est situé dans un espace  $\Pi$ , où  $\Pi$  désigne un sous-espace linéaire de l'espace des  $x$ , si  $\Pi$  comprend des vecteurs  $\varrho_{\nu \sigma}$  tels que  $j$  se laisse exprimer comme une somme  $\Sigma j_\nu$ , où chaque  $j_\nu$  est un produit extérieur des  $\varrho_{\nu \sigma}$  correspondants. On voit de suite que les directions d'amarrement de  $j$  sont les directions communes à tous les

espaces  $\Pi$  dans lesquels  $j$  est situé. La partie commune de ces espaces  $\Pi$ , qui est aussi l'espace des points définis par les vecteurs d'amarrement de  $j$ , sera dit espace d'amarrement de  $j$ .

(10.1) *Lemme.* — (i) Chaque multivecteur  $j$  est situé dans son espace d'amarrement. (ii) Les directions d'amarrement d'un  $k$ -vecteur  $j$  sont celles de la forme  $j \otimes j'$  où les  $j'$  sont des  $(k - 1)$ -vecteurs.

*Démonstration.* — Pour établir le premier énoncé, il suffira de vérifier que, si  $j$  est situé dans  $\Pi'$  et  $\Pi''$ , alors  $j$  est situé également dans leur intersection  $\Pi$ . Par une transformation élémentaire de l'espace des  $x$  en lui-même, on peut supposer que  $\Pi'$ ,  $\Pi''$  sont les sous-espaces définis par deux sous-ensembles du système de coordonnées de  $x$ . Mais alors chaque composante non nulle de  $j$  sera située à la fois dans  $\Pi'$  et dans  $\Pi''$ , donc dans  $\Pi$ . Donc  $j$ , comme somme de ses composantes cartésiennes, sera également situé dans  $\Pi$ . Pour établir le second énoncé, soit  $\Pi_0$  l'espace d'amarrement du  $k$ -vecteur  $j$ , et soit  $\Pi_1$  l'espace des points de la forme  $j \otimes j'$ , où les  $j'$  sont des  $(k - 1)$ -vecteurs. Evidemment  $\Pi_1$  est un sous-espace de  $\Pi_0$ . Il nous faut démontrer qu'il coïncide avec ce dernier. Supposons le contraire. Il existe alors dans  $\Pi_0$  une direction  $\nu$  orthogonale à  $\Pi_1$ ; désignons par  $\Pi$  l'espace formé des vecteurs de  $\Pi_0$  orthogonaux à  $\nu$ . Par définition de  $\nu$ , l'espace  $\Pi_1$  ne peut contenir aucun vecteur de la forme  $\nu + u$ , où  $u \in \Pi$ . D'autre part, on peut exprimer  $j$  comme la somme de deux projections orthogonales, d'après l'identité (4.3) de [11]. On trouve

$$j = a + (\nu \times b)$$

où  $a = (\nu \times j) \otimes \nu$  et  $b = j \otimes \nu$  sont situés dans  $\Pi$ . Ici  $b$  n'est pas nul, sans quoi  $j$  serait situé dans  $\Pi$ ; on peut donc définir  $j' = b / |b|^2$ ,  $u = a \otimes j'$ , d'où il ressort que  $j \otimes j' = \nu + u$ , donc que  $\nu + u \in \Pi_1$ , ce qui contredit ce que nous avons trouvé plus haut. La démonstration est donc achevée.

Dans le cas d'un multivecteur  $Q(x)$   $k$ -dimensionnel, nous nommerons vecteur d'amarrement local de  $Q$  tout vecteur  $\nu(x)$  de la forme  $\nu = Q \otimes Q'$  où  $Q'$  est un  $(k - 1)$ -vecteur constant. La direction d'un tel vecteur non nul sera dite direction d'amarrement locale de  $Q$ . L'équation (9.8) signifie que pour le courant

$T = \rho Q$ , les vecteurs  $\nu$  d'amarrement locaux de  $Q$  vérifient l'équation de continuité des fluides. Remarquons encore que l'opération de comultiplication par un  $(k - 1)$ -vecteur constant rappelle une opération analogue utilisée pour définir les contours d'une variété généralisée [11].

Permettons-nous, pour terminer ce paragraphe, une observation, très heuristique et superficielle, sur la signification de l'équation (9.8). Dans cette équation  $\rho$  prend la place d'une mesure, tandis que  $\nu$  est une fonction à valeurs vectorielles. Avec des conventions appropriées, on pourra, d'après (9.2), écrire (9.8) sous la forme :

$$(10.2) \quad \nu \otimes \text{grad } \rho + \rho \text{ div } \nu = 0.$$

Elle nous dit que dans la direction  $\nu$ , le gradient d'une mesure se comporte d'une façon relativement régulière. On peut l'interpréter comme exigeant une espèce de continuité absolue dans la direction  $\nu$ . Il est assez plausible que la mesure  $\rho$ , si elle est absolument continue dans les différentes directions d'amarrement locales, se révélera comme une intégrale multiple par rapport à ces directions, d'où l'on entrevoit que le courant  $\rho Q$  doit être lagrangien. Serait-ce là un mirage ? Ou est-ce le germe d'une démonstration ? C'est au lecteur à y réfléchir.

#### 11. PRINCIPES DE RÉDUCTION.

Deux variétés généralisées seront dites complémentaires, si leur somme est close, et si elles possèdent deux supports boréliens disjoints. Une propriété possédée par certaines variétés généralisées sera dite  $\sigma$ -additive si une variété généralisée s'exprimant comme une somme dénombrable  $\Sigma \mathcal{L}_\nu$ , la possède, dès que chaque  $\mathcal{L}_\nu$  la possède. Enfin une variété généralisée  $\mathcal{L}$  de dimension  $k$  dans l'espace des  $x$  de dimension  $n$ , sera dite inductive si la relation  $\tau^{-1} \tau A = \partial^{-1} \partial A$  est valable pour les variétés généralisées de dimension  $(k - 1)$  dans un espace  $(n - 1)$ -dimensionnel.

(11.1) *Principe du  $\sigma$ -polytope complémentaire.* — Soit  $\mathcal{L}$  une variété généralisée de frontière  $A$  et de dimension  $k$  dans l'espace  $n$ -dimensionnel où  $0 < k < n$ . Alors il existe un  $\sigma$ -polytope avec poids, complémentaire à  $\mathcal{L}$ .

*Démonstration.* — Soit  $\Pi^*$  un  $\sigma$ -polytope avec poids, qui possède la même frontière que  $\mathcal{L}$ . En changeant son orientation, on obtient un  $\sigma$ -polytope avec poids  $\Pi$ , tel que  $\mathcal{L} + \Pi$  soit fermé. On peut mettre  $\Pi$  sous la forme d'une somme dénombrable  $\Pi = \Sigma c_v \Delta_v$ , où les  $c_v$  sont réels et positifs, et où chaque  $\Delta_v$  désigne un simplex. Nous désignons par  $C_v$  un cône sur la frontière élémentaire de  $\Delta_v$ , et nous supposons le sommet  $x_v$  choisi, par induction, d'une façon convenable. A cet effet, soit  $\Pi_{v'}$  la somme des termes de  $\Sigma c_v C_v$ , pour  $v' < v$ , et soit  $\mu_v$  la mesure associée comme dans la formule (3.1a), non à  $\mathcal{L}$ , mais à  $\mathcal{L} + \Pi_{v'}$ . On choisira  $x_v$  de façon à ce que  $|C_v| \leq 2|\Delta_v|$  et que la mesure  $\mu_v$  d'un support de  $C_v$  s'annule. Ceci est possible, puisqu'on peut donner à  $x_v$  un ensemble de positions de la puissance du continu, qui correspondent à des supports disjoints: ces supports n'auront donc pas tous des mesures positives. Le  $\sigma$ -polytope avec poids, défini par la somme dénombrable  $\Sigma c_v C_v$ , sera complémentaire à  $\mathcal{L}$ , ce qui achève la démonstration.

(11.2) *Principe de décomposition.* — Soit  $P$  une propriété  $\sigma$ -additive, et soit  $\mathcal{L}$  une variété généralisée. Alors il existe une décomposition  $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \mathcal{L}''$ , où  $\mathcal{L}'$ ,  $\mathcal{L}''$  sont des variétés généralisées telles que  $\mathcal{L}'$  ait la propriété  $P$  tandis que  $\mathcal{L}''$  ne possède aucune sous-variété non nulle qui ait la propriété  $P$ .

*Démonstration.* (Rappelons qu'on dit de deux variétés généralisées  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  que  $\mathcal{L}_2$  est une sous-variété de  $\mathcal{L}_1$ , si la différence  $\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2$  est une variété généralisée). — Soit  $a_1$  le suprémum de l'étendue des sous-variétés de  $\mathcal{L}$  qui possèdent la propriété  $P$ . Nous désignons par  $\mathcal{L}_1$  une sous-variété la possédant, dont l'étendue dépasse  $\frac{1}{2} a_1$ ; une telle sous-variété existe à moins que  $a_1 = 0$ , et dans ce dernier cas, on pose  $\mathcal{L}_1 = 0$ . Généralement, si les sous-variétés  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_{v-1}$  ont été définies, soit  $a_v$  le suprémum de l'étendue des sous-variétés de  $\mathcal{L} - \mathcal{L}_1 - \dots - \mathcal{L}_{v-1}$  qui possèdent la propriété  $P$ , et soit  $\mathcal{L}_v$  une telle sous-variété la possédant, dont l'étendue dépasse  $\frac{1}{2} a_v$ , si  $a_v = 0$  on pose  $\mathcal{L}_v = 0$ . On trouve sans peine que les expressions  $\mathcal{L}' = \Sigma \mathcal{L}_v$ ,  $\mathcal{L}'' = \mathcal{L} - \mathcal{L}'$  désignent toutes deux des sous-variétés de  $\mathcal{L}$ , et que  $\mathcal{L}'$  possède la propriété  $P$ . Il reste à montrer que  $\mathcal{L}''$  ne possède aucune sous-variété  $\neq 0$  ayant la propriété  $P$ . Mais si  $a$

est l'étendue d'une telle sous-variété, on aura, par définition de  $a_v$ ,  $a \leq a_v$  pour chaque  $v$ . D'autre part, la somme  $\Sigma \frac{1}{2} a_v$  ne peut dépasser l'étendue de  $\Sigma \mathcal{L}_v$ , donc celle de  $\mathcal{L}'$ , et par conséquent cette somme converge. Il s'en suit que  $a = 0$ , ce qui achève la démonstration.

(11.3) *Principes de subdivision et de localisation.* — (i) Soit  $\mathcal{L}$  une variété généralisée inductive de frontière  $A$ ; alors il existe une subdivision de l'espace  $n$ -dimensionnel en cubes  $Q$  congruents, aussi petits que l'on voudra, tels que, si  $F$  désigne la frontière de  $Q$ , l'intersection  $\mathcal{L} \cap F$  s'annule, et que l'intersection  $\mathcal{L} \cap Q$  possède une frontière  $A$ . (ii) De plus, si  $E$  désigne un ensemble borélien quelconque, l'intersection  $\mathcal{L} \cap E$  possède une frontière  $A$ .

*Démonstration.* — En ce qui concerne (i), il suffira, par itération, d'établir l'affirmation correspondante pour une subdivision en bandes congruentes, orthogonales à une direction donnée  $V$ . Nous nous servirons des mêmes symboles  $Q$ ,  $F$  pour désigner une telle bande et sa frontière, et nous désignerons par  $\mathcal{P}$  un  $\sigma$ -polytope avec poids complémentaire à  $\mathcal{L}$ . Nous appellerons niveau d'un point  $x$ , et nous désignerons par  $z(x)$  la projection dans la direction  $V$  du vecteur  $x$ . Nous écrirons  $\Pi$  pour une certaine famille de sous-espaces équidistants  $z(x) = \text{const.}$  On s'arrangera, par une translation dans la direction  $V$  s'il le faut, à ce que cette famille remplisse deux conditions que nous avons introduites ailleurs [14 (6.3)]. Ce sont les suivantes: a) l'intersection de  $\mathcal{L}$  avec chaque membre de  $\Pi$  s'annule; b) l'intersection de  $\mathcal{L} + \mathcal{P}$  avec le demi-espace au-dessus du niveau correspondant  $z(x) = \text{const.}$  a pour périmètre ce que nous avons appelé le « contour » de  $\mathcal{L} + \mathcal{P}$  à ce niveau. Rappelons qu'un tel contour est, par sa définition (loc. cit.), une variété généralisée close  $(k - 1)$  dimensionnelle dans un espace  $z(x) = \text{const.}$  de dimension  $(n - 1)$ , et que, par conséquent, elle possède un substratum  $A$ , d'après notre hypothèse inductive sur  $\mathcal{L}$ . Il s'en suit aisément\* que  $\Pi$  divise l'espace en bandes  $Q$  telles que  $(\mathcal{L} + \mathcal{P}) \cap Q$  ait une frontière  $A$  et que la frontière  $F$  de  $Q$  ait une intersection nulle avec  $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ , et par conséquent

1) On remarque que  $(\mathcal{L} + \mathcal{P}) \cap Q$  a la même frontière que le cône de son périmètre.

avec  $\mathcal{L}$ . Or la frontière de  $\mathcal{L} \cap Q$  s'obtient en ajoutant à celle de  $(\mathcal{L} + \mathcal{P}) \cap Q$  la frontière d'un  $\sigma$ -polytope avec poids  $\mathcal{P}^* \cap Q$ , où  $\mathcal{P}^*$  s'obtient de  $\mathcal{P}$  en changeant l'orientation. Donc  $\mathcal{L} \cap Q$  a une frontière  $A$ , et (i) est démontré.

Passons à (ii). D'après un résultat déjà cité [12, Ap. III], la propriété de posséder une frontière  $A$  est certainement  $\sigma$ -additive. Il s'ensuit de (i) que  $\mathcal{L} \cap E$  aura une frontière  $A$  lorsque  $E$  est ouvert. En soustrayant de  $\mathcal{L}$ , on voit qu'il en est de même lorsque  $E$  est fermé, donc, par addition, lorsque  $E$  est une réunion dénombrable d'ensembles fermés. Il est clair qu'en répétant ce raisonnement, on trouvera que  $\mathcal{L} \cap E$  possède, pour tout  $E$  borélien, une frontière  $A$ , ce qui établit (ii).

Ajoutons qu'un raisonnement du genre utilisé ici montre qu'une variété généralisée inductive  $\mathcal{L}$ , dont le substratum  $T = \rho Q$  vérifie (9.7) localement, possède une frontière  $A$ . En désignant par  $G$  le même ouvert que dans la définition de cette vérification locale, on se base alors sur la remarque suivante, dont la démonstration se calque sur celle de [11 (6.3)]: presque tout cube  $Q$ , assez petit et de centre fixe dans  $G$ , aura une frontière élémentaire  $F$ , dont le niveau correspond à un contour  $C$  de  $\mathcal{L}$ , tel que  $C$  soit un périmètre de  $\mathcal{L} \cap Q$ .

Remarquons encore que (11.1) et (11.2) permettent de réduire la discussion des cas d'égalité dans (8.5) et dans les inclusions analogues pour les variétés de contact. Par exemple, pour établir l'égalité  $A_G = \partial^{-1} \partial A$  pour les variétés de contact, il suffira de l'établir pour celles qui sont closes. En effet, supposons qu'on ait établi ce cas particulier, et soit  $\mathcal{L}$  une variété de contact à frontière  $A$ . Désignons par  $\mathcal{P}$  un  $\sigma$ -polytope avec poids, complémentaire à  $\mathcal{L}$ , et par  $E$  un support borélien de  $\mathcal{L}$  disjoint d'un support borélien de  $\mathcal{P}$ . En modifiant notre système d'équations différentielles en dehors de  $E$ , on s'arrange à ce que  $\mathcal{L} + \mathcal{P}$  soit une variété de contact. Par hypothèse, puisque  $\mathcal{L} + \mathcal{P}$  est close,  $\mathcal{L} + \mathcal{P}$  sera lagrangienne généralisée. Evidemment il en sera de même de son intersection avec  $E$ , qui est  $\mathcal{L}$ . Donc  $\mathcal{L}$  est une variété de contact lagrangienne généralisée, pour le système modifié, donc pour le système donné, qui n'a pas changé dans  $E$ .

12. LES DIMENSIONS  $k = 0$  ET  $k = n$ .

Nous allons entamer l'étude de quelques dimensions  $k$  particulières dans l'espace  $n$ -dimensionnel. Nous commençons ici par  $k = 0$  et  $k = n$ . Rappelons les conventions qui s'y rapportent.

Un  $k$ -vecteur se réduit à une quantité scalaire pour  $k = 0$ , pseudo-scalaire pour  $k = n$ . Dans les deux cas, sa direction se réduit au signe  $+$  ou  $-$ . Un intégrant  $f(x, j)$  quelconque est donc donné par une paire de fonctions

$$(12.1) \quad f_+(x) = f(x, +), \quad f_-(x) = f(x, -);$$

il sera linéaire en  $j$  si  $f_+ = -f_-$ . Une variété généralisée  $\mathcal{L}$  sera donnée par une représentation de la forme

$$(12.2) \quad \mathcal{L}(f) = \int f_+ d\mu_+ + \int f_- d\mu_-,$$

où  $\mu_+, \mu_-$  sont des mesures finies à supports compacts. Remarquons que si  $\mathcal{L}$  ne possède aucune sous-variété singulière, les mesures  $\mu_+$  et  $\mu_-$  auront des supports boréliens disjoints.

Il y a, cependant, des différences importantes entre les deux cas  $k = 0$  et  $k = n$ . En effet, une quantité pseudo-scalaire se distingue nettement de la quantité scalaire, à laquelle elle est normale, par les conventions qui gouvernent la multiplication extérieure. Il ressort de ces conventions que pour  $k = n$ , tout intégrant linéaire est exact, tandis que pour  $k = 0$  les intégrants exacts sont les intégrants linéaires constants par rapport à  $x$ .

Les dimensions  $k = 0$  et  $k = n$  diffèrent aussi dans la définition des polytopes, etc. Cela tient à ce que la notion de point, orienté avec le signe  $+$  ou  $-$ , est celle de simplex de dimension 0, tandis qu'elle est toute différente de celle de simplex de dimension  $n$ . On notera qu'un  $\sigma$ -polytope avec poids, de dimension  $k = 0$ , sera défini par une fonctionnelle de la forme

$$(12.3) \quad \mathcal{L}(f) = \sum a_\nu f_+(x_\nu) + \sum b_\nu f_-(x_\nu),$$

où  $a_\nu \geq 0, b_\nu \geq 0, \sum (a_\nu + b_\nu) < \infty, \text{Sup } |x_\nu| < \infty$ . C'est le cas de mesures discrètes dans (12.2). Pour qu'un tel  $\sigma$ -polytope avec

poids ait la même frontière qu'une variété généralisée donnée par (12.2), on aura à poser

$$(12.4) \quad \int d(\mu_+ - \mu_-) = \Sigma(\alpha_v - b_v).$$

Ainsi, pour la dimension  $k = 0$ , toute variété généralisée possède une frontière  $A$ , puisqu'on peut toujours choisir un  $\sigma$ -polytope avec poids de façon à ce que le côté droit de (12.4) ait une valeur donnée. D'ailleurs (12.2) montre déjà que, pour la dimension  $k = 0$ , toute variété généralisée s'exprime comme un mélange de la forme  $\int \mathcal{L}_\alpha d\alpha$ , où chaque  $\mathcal{L}_\alpha$  est un simplex. Dans une étude complète des cas d'égalité de (8.5), ce résultat, peu intéressant en lui-même, pourra éventuellement servir de base à une démonstration inductive d'un théorème général. On conçoit aussi une induction descendante possible, en partant du résultat correspondant pour la dimension  $k = n$ . Nous combinons ces deux résultats en un seul énoncé:

(12.5) Point de départ: les cas dégénérés  $k = 0$  et  $k = n$  dans l'espace  $n$ -dimensionnel. Toute variété généralisée de dimension  $k = 0$  appartient aux classes  $A$  et  $A_{gd}$ , toute variété généralisée de dimension  $k = n$  et de frontière  $A$ , à la classe  $A_{gd}$ . Chacune d'elles appartiendra à la classe  $A_d$ , si elle ne possède aucune sous-variété singulière non nulle.

*Démonstration.* — Ce qui se rapporte à la dimension  $k = 0$  se ramène aux remarques déjà faites. Reste à traiter la dimension  $k = n$ . Soit  $\mathcal{L}$  une variété généralisée de cette dimension, et supposons qu'elle possède la même frontière qu'un  $\sigma$ -polytope  $\Pi$  avec poids. En changeant d'orientation, on aura un  $\sigma$ -polytope  $\Pi^*$  avec poids, tel que  $\mathcal{L} + \Pi^*$  soit clos. Mais alors  $\mathcal{L} + \Pi^*$  sera singulier, donc  $\mathcal{L}$  et  $\Pi$  auront le même substratum. On peut poser, d'après (11.2),

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \mathcal{L}'', \quad \Pi = \Pi' + \Pi'',$$

où  $\mathcal{L}'$ ,  $\Pi'$  sont des variétés singulières, et où  $\mathcal{L}''$ ,  $\Pi''$  sont des variétés généralisées, de même substratum, qui ne possèdent aucune sous-variété singulière non nulle. On en conclut facilement, en utilisant pour  $\mathcal{L}''$  et  $\Pi''$  des représentations du type (12.2), que  $\mathcal{L}'' = \Pi''$ , donc que  $\mathcal{L}'' \in A_d$ , à condition de faire

appel à la remarque faite après la formule (12.2), selon laquelle les mesures  $\mu''_+$ ,  $\mu''_-$ , qui y paraîtront lorsqu'il s'agit de représenter  $\mathcal{L}''$ , auront des supports boréliens disjoints. On utilisera encore cette même formule pour représenter  $\mathcal{L}'$ , et l'on décomposera les mesures  $\mu'_+$ ,  $\mu'_-$  qui y paraîtront, chacune en deux parties, respectivement absolument continue et singulière par rapport à la mesure  $\mu''_+$  ou  $\mu''_-$  correspondante. En faisant l'addition, on trouvera pour  $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \mathcal{L}''$  une nouvelle représentation, d'où il ressort que  $\mathcal{L} \in A_{gd}$ , ce qui complète la démonstration de notre énoncé.

### 13. LA DIMENSION $k = n - 1$ .

Nous poursuivons notre étude, mais en improvisant les démonstrations, qui déjà seront trop faibles pour nous livrer l'égalité vraisemblable  $A_{gd} = \partial^{-1} \partial A$ . Il nous manque une méthode générale, il nous manque aussi, même pour  $k = n - 1$ , une méthode qui conduirait au résultat le plus précis. Cependant, comme nous l'avons dit dans notre introduction, le résultat que nous allons démontrer ici, pour  $k = n - 1$ , est toujours un théorème de nature progressive. Sa démonstration se basera sur celle que nous avons présentée, il y a dix ans, dans les cas  $n = 2$  et  $n = 3$  avec M. FLEMING [9, 5].

(13.1) *Théorème.* — Soit  $\mathcal{L}$  une variété généralisée de dimension  $n - 1$  et de frontière  $A$ . Alors  $\mathcal{L} \in A_g$ .

Pour démontrer ce théorème, équivalent d'après (8.5) à l'égalité  $A_g = \partial^{-1} \partial A$ , nous aurons besoin de définitions et de lemmes auxiliaires.

Un polytope clos  $\mathcal{P}$  sera dit irréductible s'il ne possède aucune décomposition  $\mathcal{P} = \mathcal{P}' + \mathcal{P}''$ , où  $\mathcal{P}'$ ,  $\mathcal{P}''$  sont des polytopes clos non nuls. Une variété généralisée close  $\mathcal{L}$  sera dite pure, si pour toute expression  $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \mathcal{L}''$  de  $\mathcal{L}$  comme la somme de deux variétés généralisées closes  $\mathcal{L}'$ ,  $\mathcal{L}''$ , il existe dans l'intervalle  $0 \leq \theta \leq 1$  une constante  $\theta$ , telle que  $\mathcal{L}' = \theta \mathcal{L}$ .

Pour abrégé, un polytope clos irréductible de dimension  $n - 1$ , et une variété généralisée close pure de la même dimension, seront dites, respectivement, polytope typique et variété typique, lorsqu'elles sont situées dans l'espace  $n$ -dimensionnel.

La notion de polytope typique nous permettra de faire appel à un théorème de séparation bien connu, tandis que celle de variété typique s'exprime très simplement par l'intermédiaire de celle de point extrême, au sens abstrait, d'un certain ensemble convexe. (Plus précisément, les variétés typiques  $\mathcal{L}$  d'étendue  $|\mathcal{L}| = 1$  sont les points extrêmes, au sens abstrait, de l'ensemble des variétés généralisées closes de la même étendue et de la même dimension.)

(13.2) *Lemme de séparation.* — Soit  $\mathcal{P}$  un polytope typique situé dans une boule de diamètre unité, et soit  $\Pi$  un hyperplan. Alors il existe un polytope singulier  $S$ , situé dans  $\Pi$  et d'étendue  $\leq 2$ , tel que l'on ait  $\mathcal{P} + S = \mathcal{P}' + \mathcal{P}''$ , où  $\mathcal{P}'$ ,  $\mathcal{P}''$  sont des polytopes clos, situés de part et d'autre de  $\Pi$ .

(13.3) *Lemme d'approximation.* — Toute variété typique  $\mathcal{L}$  s'exprime sous la forme  $\mathcal{L} = \lim c_\nu \mathcal{P}_\nu$ , où  $c_\nu$  est une constante positive et  $\mathcal{P}_\nu$  un polytope typique.

(13.4) *Lemme de convexité* — Toute variété généralisée close, de dimension  $n - 1$  dans l'espace  $n$ -dimensionnel, s'exprime sous la forme d'un mélange  $\int \mathcal{L}_\alpha d\alpha$ , où chaque  $\mathcal{L}_\alpha$  est une variété typique.

*Démonstrations des lemmes.* — Pour établir (13.2), soit  $C$  le périmètre de la partie de  $\mathcal{P}$  dans un des demi-espaces ouverts bornés par  $\Pi$ . Il suffira de montrer que  $C$  est le périmètre d'un polytope  $Q$  situé dans  $\Pi$  et d'étendue  $\leq 1$ ; car en ajoutant à  $Q$  le polytope d'orientation opposé, on obtiendra un polytope singulier  $S$  avec les propriétés énoncées. Pour obtenir un tel polytope  $Q$ , il suffit de couper par  $\Pi$  le domaine polytopique  $V$  orienté, lequel est situé dans la boule donnée et possède la frontière orientée  $\mathcal{P}$ . L'existence et l'unicité de  $V$  sont des conséquences immédiates d'un théorème de séparation, connu des topologues [1, p. 380], et qui se démontre très simplement en utilisant l'homotopie, de sorte qu'il est devenu un exercice pour les étudiants. L'orientation de  $Q$  se détermine par la méthode des contours [11].

Pour établir (13.3), on fera appel à [12, (1.1) ThA] pour exprimer d'abord  $\mathcal{L}$  sous la forme  $\mathcal{L} = \lim \mathcal{L}_\nu$ , où  $\mathcal{L}_\nu$  est un polytope clos avec poids. (Voir les remarques qui suivent

l'énoncé du théorème cité.)  $\mathcal{L}_v$  s'exprime donc, d'après la topologie combinatoire, comme une combinaison linéaire, à coefficients positifs, de polytopes clos [4 (3.3) lemma] et par conséquent, comme une telle combinaison linéaire de polytopes typiques. En s'appuyant sur un résultat facile de la théorie des points extrêmes [p. ex. 4, A1, p. 482] on en tire que  $\mathcal{L} // \mathcal{L} | = \lim \mathcal{P}_v // \mathcal{P}_v |$  pour une suite convenable de polytopes typiques  $\mathcal{P}_v$ , ce qui conduit immédiatement à l'énoncé (13.3).

Pour établir (13.4), on fera appel de nouveau à la théorie des points extrêmes [p. ex. 2, (4.2)] pour exprimer la variété généralisée donnée, qu'on peut supposer d'étendue unité, comme un mélange, par rapport à une mesure unité, des  $\mathcal{L}_\alpha // \mathcal{L}_\alpha |$ . Notre énoncé sera une conséquence immédiate.

Des lemmes (13.2), (13.3) nous déduirons :

(13.5) *Théorème.* — Toute variété typique non singulière s'exprime sous la forme  $c\mathcal{L}$  où  $c$  est une constante positive, et où  $\mathcal{L}$  est une variété greffée close.

*Démonstration.* — Ainsi que nous l'avons dit au paragraphe 7, les variétés greffées coïncident avec ce que nous avons appelé précédemment variétés généralisées admissibles  $B$  dans [12], et en particulier les variétés greffées closes sont les limites des polytopes clos. Il suffira donc de montrer qu'une variété typique non singulière aura la forme  $c \lim \mathcal{P}_v$ , où les  $\mathcal{P}_v$  sont des polytopes clos. Or c'est une conséquence immédiate du lemme (13.3), dans le cas où les constantes  $c_v$  ont une limite  $c$  finie et non nulle, pour une sous-suite de valeurs de  $v$ . Il en est de même si les  $c_v$  tendent vers l'infini, puisqu'on peut alors les supposer entiers. Il suffira donc de montrer qu'une variété typique de la forme  $\lim c_v \mathcal{P}_v$ , où  $\lim c_v = 0$  et où les  $\mathcal{P}_v$  sont des polytopes typiques, sera singulière. Par conséquent il suffira de montrer que son support se réduit à un seul point. Nous supposons le contraire, et nous établirons une contradiction. A cet effet, soit  $\Pi$  un hyperplan quelconque, et choisissons, d'après (13.2), pour chaque  $v$  un polytope singulier  $S_v$  d'étendue  $\leq 2$ , tel que l'on ait  $\mathcal{P}_v + S_v = \mathcal{P}'_v + \mathcal{P}''_v$ , où  $\mathcal{P}'_v, \mathcal{P}''_v$  sont des polytopes clos, situés de part et d'autre de  $\Pi$ . On trouve, puisque  $\lim c_v = 0$ ,

$$\lim c_v \mathcal{P}_v = \lim c_v (\mathcal{P}_v + S_v) = \lim c_v \mathcal{P}'_v + c_v \mathcal{P}''_v.$$

En prenant une sous-suite de  $v$ , on trouve donc que notre variété typique se décompose en deux parties closes, données par les limites de  $c_v \mathcal{P}'_v$  et  $c_v \mathcal{P}''_v$ , et situées de part et d'autre de  $\Pi$ . L'une d'elles sera donc nulle, ce qui n'est possible,  $\Pi$  étant arbitraire, que si notre variété typique a pour support un seul point.

Du résultat ainsi démontré, il s'en suit, d'après (13.4), que :

(13.6) *Théorème.* — Toute variété généralisée close, de dimension  $n - 1$  dans l'espace  $n$ -dimensionnel, s'exprime sous la forme d'un mélange  $\int \mathcal{L}_\alpha d\alpha$  où chaque  $\mathcal{L}_\alpha$  est une variété greffée close.

A proprement parler, ce qu'on déduit par la voie indiquée, c'est que la variété en question s'exprime comme la somme d'un tel mélange et d'une variété singulière. Mais cela revient au même, puisqu'une variété singulière est elle-même une variété greffée.

Du théorème (13.6), on passe maintenant au théorème (13.1), en raisonnant tout comme à la fin du paragraphe 11. Le théorème (13.1) est donc établi, lui aussi.

#### 14. LA DIMENSION $k = 1$ .

Nous avons laissé pour la fin le cas, intéressant pour la mécanique des fluides, où la dimension de nos variétés est  $k = 1$ . Comme nous l'avons remarqué dans l'introduction, ce cas n'a été traité précédemment que pour  $n = 2$ , quand il se réduit à celui que nous venons de discuter. Or, déjà pour  $n = 3$ , la voie suivie ne s'applique plus lorsque  $k = 1$ . En effet, l'énoncé analogue à (13.6) est faux, comme il ressort d'un exemple très simple, dû à M. E. Bishop.

On soumet à une rotation, croissante de 0 à  $2\pi$ , un cercle donné, par rapport à un axe, dans son plan, qui ne le coupe pas. Les positions successives  $\theta$  du cercle engendrent un tore  $\Theta$ , et nous désignons par  $v(x)$  une direction qui, pour  $x \in \Theta$ , est tangente à  $\Theta$  au point  $x$ , et qui y fait un angle constant, irrationnel à  $\pi$ , avec la position du cercle  $\theta$  passant par le même point. Nous définissons

$$\mathcal{L}(f) = \int_{\Theta} f[x, v(x)] da ,$$

où  $da$  désigne la mesure 2-dimensionnelle. Soit  $a$  l'aire de  $\Theta$ , et soit  $C(t)$  l'arc de longueur  $t$  d'une courbe sur  $\Theta$ , qui possède un point initial fixe donné, et qui vérifie l'équation différentielle  $x' = \nu(x)$ . On trouve que

$$\mathcal{L}(f) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a}{t} \int_{C(t)} f[x, \nu(x)] ds,$$

où  $ds$  est la longueur d'arc élémentaire sur  $C(t)$ . On en tire aisément que  $\mathcal{L}(f) = 0$  pour tout  $f$  exact, donc que  $\mathcal{L}$  est close. En outre, il est évident que  $\mathcal{L}$  n'est pas identiquement nulle. Si l'énoncé analogue à (13.6) était exact, on en conclurait que  $\mathcal{L} = \int \mathcal{L}_\alpha d\alpha$ , où les  $\mathcal{L}_\alpha$  seraient des courbes closes rectifiables, vérifiant comme  $\mathcal{L}$  l'équation différentielle  $x' = \nu(x)$ , et situées sur  $\Theta$ . Or il n'existe sur  $\Theta$  aucune courbe close rectifiable, vérifiant cette équation différentielle.

(14.1) *Théorème.* — Soit  $\mathcal{L}$  une variété généralisée de dimension  $k = 1$  et de frontière  $A$  dans l'espace  $n$ -dimensionnel. Alors  $\mathcal{L} \in A_g$ .

Nous aurons besoin du lemme suivant :

(14.2) *Lemme.* — Soit  $\mathcal{L}$  une variété généralisée close de dimension  $k = 1$ , telle que  $|\mathcal{L}| = 1$ . Alors il existe une suite de polygones clos  $\mathcal{P}_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ), et d'entiers positifs correspondants  $N_\nu$  qui tendent vers l'infini, telle que l'on ait

$$\mathcal{L} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{P}_\nu / N_\nu.$$

*Démonstration du lemme (14.2).* — On peut supposer, sans restreindre la généralité, que  $\mathcal{L}$  est située dans un cube unité, que nous supposerons fixe dans la suite. Toutes les constructions que nous allons faire se passeront dans le même cube. En faisant appel à un résultat indépendant de la dimension  $k$ , et que nous avons déjà utilisé dans le paragraphe précédent [12, (1.1) Th. A], on peut écrire  $\mathcal{L} = \lim \mathcal{L}_\nu$ , où chaque  $\mathcal{L}_\nu$  est une variété close se réduisant à un polygone avec poids, c'est-à-dire à une somme finie de segments orientés avec des poids correspondants. D'après la topologie combinatoire, chaque  $\mathcal{L}_\nu$  s'exprime

encore [4, (3.3) lemma], comme une combinaison linéaire, à coefficients positifs, de polygones clos ordinaires,

$$\mathcal{L}_v = \sum_{\rho=1}^{M_v} c_{v\rho} \mathcal{P}_{v\rho} .$$

On peut s'arranger, sans changer la limite des  $\mathcal{L}_v$ , à ce que les coefficients de chacune de ces combinaisons linéaires soient rationnels et de même dénominateur  $N_v$ . On peut évidemment supposer  $N_v$  aussi grand que l'on voudra: nous supposerons donc que  $N_v \geq v M_v$ , où  $M_v$  est le nombre des termes de notre combinaison linéaire.

Quant aux numérateurs des coefficients rationnels  $c_{v\rho}$  de cette combinaison linéaire, nous les supprimerons en remplaçant chaque polygone clos  $\mathcal{P}_{v\rho}$  ( $\rho = 1, 2, \dots, M_v$ ) par un multiple correspondant, qui sera encore un polygone clos ordinaire. En désignant ce dernier par le même symbole, on aura donc

$$\mathcal{L}_v = \sum_{\rho=1}^{M_v} \mathcal{P}_{v\rho}/N_v .$$

Ici on peut s'arranger, sans changer la limite des  $\mathcal{L}_v$ , à ce que la somme au côté droit se réduise à un seul terme. Il suffit de faire des polygones  $\mathcal{P}_{v\rho}$  ( $\rho = 1, 2, \dots, M_v$ ) un seul polygone clos  $\mathcal{P}_v$ , en ajoutant  $M_v$  paires de segments opposés, de longueur  $\leq 1$ , qui relie un polygone au suivant. On aura ajouté ainsi à  $\mathcal{L}_v$  de cette façon une variété singulière dont l'étendue ne dépasse pas  $2M_v/N_v$ , ce qui tend vers zéro.

Ainsi  $\mathcal{L} = \lim \mathcal{P}_v/N_v$ , ce qui achève la démonstration.

*Démonstration du théorème (14.1).* — D'après le raisonnement de la fin du paragraphe 11, on peut se borner, comme pour la dimension  $k = n - 1$ , au cas où  $\mathcal{L}$  est close. On peut supposer de plus que  $|\mathcal{L}| = 1$ , donc qu'elle vérifie les hypothèses du lemme (14.2). On a dans ce cas

$$\mathcal{L} = \lim \mathcal{P}_v/N_v ,$$

et puisqu'il s'en suit que  $\lim |\mathcal{P}_v|/N_v = |\mathcal{L}| = 1$ , on peut s'arranger à ce que  $|\mathcal{P}_v| = N_v$ . A cet effet, on remplace d'abord  $N_v$  par le plus petit entier supérieur ou égal à  $|\mathcal{P}_v|$ , et on ajoute ensuite à  $\mathcal{P}_v$  une paire de segments opposés s'il le faut.

En divisant maintenant  $\mathcal{P}_v$  en  $N_v$  parties de même longueur, qui seront des polygones ordinaires, c'est-à-dire des courbes polygonales à deux extrémités, de longueur unité, on trouve ainsi que  $\mathcal{L}$  est limite d'une combinaison convexe de polygones ordinaires de longueur unité. Ces derniers seront en outre situés dans un cube fixe.

La limite que nous utilisons ici est la limite faible. Cependant, en ce qui concerne les suites convergentes, elle est équivalente à la notion de limite qu'on dérive d'une métrique, nommée métrique de McShane [6, p. 534]. On peut donc faire appel à un théorème général sur les ensembles convexes dans les espaces métriques compacts [14, prop. 7, p. 87]. Tout comme dans une situation analogue [10, (4.1) (a), p. 6], on trouve que  $\mathcal{L}$  s'exprime comme un mélange  $\int \mathcal{L}_\alpha d\alpha$ , où chaque  $\mathcal{L}_\alpha$  est limite d'un polygone ordinaire correspondant  $Q$ , de longueur unité, situé dans un cube fixe.

Or les limites de tels polygones  $Q$ , nous les connaissons depuis longtemps: ce sont les courbes généralisées de la même longueur, dans le cube en question.

A vrai dire, il faut y ajouter les limites concentrées en un seul point: c'est-à-dire les variétés singulières de longueur unité concentrées en un point du cube. De toute façon, les limites de nos polygones  $Q$  seront des variétés greffées de dimension  $k = 1$ .

Ainsi  $\mathcal{L}$  est un mélange de ces dernières, c'est-à-dire  $\mathcal{L} \in A_g$ . Le théorème est démontré.

## LITTÉRATURE

- [1] ALEXANDROFF, P. et H. HOPF, *Topologie*. Berlin, 1935.
- [2] BISHOP, E. et K. DE LEEUW, The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 9 (1959), 305-331.
- [3] FLEMING, W. H., K. KRICKEBERG, Chr. PAUC, Three papers on summable functions whose first derivatives are measures. *Ann. di Mat.*, 44 (1957), 93-152.
- [4] — et L. C. YOUNG, A generalized notion of boundary. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 76 (1954), 457-484.
- [5] — et L. C. YOUNG, Representations of generalized surfaces as mixtures. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, II, 5 (1956), 117-144.
- [6] McSHANE, E. J., Generalized curves. *Duke Math. J.*, 6 (1940), 513-536.

- [7] YOUNG, L. C., Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the calculus of variations. *Comptes rendus de la Société des Sciences et Lettres de Varsovie*, III, 30 (1937), 212-234.
- [8] — Surfaces paramétriques généralisées. *Bull. Soc. Math. France*, 79 (1951), 59-85.
- [9] — Champs vectoriels attachés à une mesure plane. *J. Math. pures et appl.*, 35 (1956), 344-358.
- [10] — Remarks on the theory of the integral. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 2, vol. 7 (1958), 48-54.
- [11] — Contours on Generalized and Extremal Varieties. *J. Math. and Mech.*, 11 (1962), 615-646.
- [12] — Generalized varieties as limits. *J. Math. and Mech.* (à paraître).
- [13] — Some extremal questions for simplicial complexes, I-V. *Rend. Circ. Mat. Palermo*. La partie I a paru, 2, vol. 11 (1962), 178-184; les parties suivantes paraîtront dans le même périodique.
- [14] BOURBAKI, N., Intégration. *Actualités sc. et ind.*, n° 1175, Paris, 1952

(reçu le 28 octobre 1963)

L. C. YOUNG  
Dept. of Math.  
University of Wisconsin  
Madison, Wis.