2. Descriptions eulériennes et lagrangiennes.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

méthodes: cela tient, comme nous l'avons indiqué ailleurs [13, III, V], à notre ignorance de toutes sortes de choses des plus simples. La valeur $k = 1$ est celle qui se présente dans le mouvement des fluides; ce cas n'a pas été traité précédemment, sauf pour $n = 2$ [9]. Le cas où $k = n - 1$ a été traité, un peu plus tard, pour $n = 3$, avec quelques restrictions supplémentaires concernant la frontière. Les valeurs $k = 0$ et $k = n$ donnent lieu à deux cas dégénérés, dont le premier est trivial, tandis que le second se relie à des travaux récents sur les gradients généralisés [3].

2. Descriptions eulériennes et lagrangiennes.

Dans la suite, on sous-entendra les conventions usuelles de l'analyse: les ensembles seront boréliens, les fonctions mesurables dans le même sens, les ensembles de mesure nulle, par rapport à la mesure dont il s'agit au moment donné, seront négligés.

Un mouvement fluide stationnaire dans l'espace à n dimensions se définit, dans la description eulérienne, par une mesure μ et par une fonction, à valeurs vectorielles, $v = v(x)$ que nous nommons la vitesse au point x. Nous supposerons μ à valeurs finies, au moins pour les ensembles compacts. La mesure μ est celle de la quantité du fluide se trouvant dans un ensemble quelconque; on l'exprime souvent par l'intégrale de volume correspondante de la densité ρ du fluide. Dans le cas le plus général, ρ est une distribution de Schwartz; dans un grand nombre de problèmes classiques ρ est une constante, mais ici nous supposerons plutôt que $v(x)$ est un vecteur de grandeur unité, ce qui ne représente pas une restriction véritable, puisque la vitesse n'intervient que multipliée par la densité ρ qu'on aura modifiée convenablement pour compenser. De toute façon, nous considérons la mesure μ comme un élément fondamental de la description eulérienne, tout autant que la vitesse unité, définie par le vecteur $v(x)$.

Dans la mécanique classique des fluides, on passe de la description eulérienne à celle de Lagrange, en résolvant le système d'équations différentielles du premier ordre

$$x' = v(x) . \tag{2.1}$$

Ici x' pourra maintenant désigner une dérivée prise par rapport à la longueur d'arc s, et les lignes intégrales, ou lignes de courant, auront la forme $x = x(s, \alpha)$, où α est une étiquette plutôt qu'une valeur initiale; ce sont là les solutions classiques de (2.1), et deux d'entre elles peuvent très bien se toucher à plusieurs reprises, même le long d'arcs entiers.

La description lagrangienne classique consiste moins en la connaissance des lignes de courant, que dans celle d'une décomposition de l'espace en sous-ensembles E_α, où chaque E_α appartient à une ligne de courant correspondante. Comme les E_α seront disjoints, on ne peut pas en général les identifier avec les lignes de courant, mais plutôt avec des sous-ensembles convenables. Le symbole α est encore une étiquette, mais ce n'est naturellement plus la même que précédemment, et chaque E_α sera supposé de longueur finie et positive. En outre, E_α étant un sous-ensemble d'une courbe rectifiable, aura une orientation déterminée. De la connaissance d'une décomposition de l'espace en de tels sous-ensembles E_α orientés, on retrouve alors, en passant à la tangente, la vitesse $v(x)$ — du moins presque partout sur chaque ligne de courant.

Par contre, il n'y a pas moyen d'en déduire l'autre élément fondamental de notre description eulérienne, la mesure μ.

Pour cette raison, nous allons modifier légèrement la description lagrangienne classique. Le lecteur nous le pardonnera sans doute, puisqu'elle date encore du bon vieux temps où les mathématiques entières n'étaient guère qu'un jeu de salon: la mécanique des fluides avait alors le rôle d'un jouet merveilleusement fascinant, où se reflétaient ensemble, phénomènes naturels et paradoxes plaisants, sous la forme de charmants exercices sur les éléments de la représentation conforme, ou autres du même genre.

Ce qu'il nous faut encore, c'est de savoir comment la masse fluide se répartit parmi les différentes lignes de courant. Nous entendrons donc par une description lagrangienne l'expression d'une mesure μ comme mélange de mesures finies positives μ_α, où chaque μ_α s'annule en dehors d'un ensemble orienté E_α correspondant, et coïncide sur E_α, avec la longueur des ensembles rectifiables.

Dans la suite nous nous permettrons encore d'interpréter (2.1) dans un sens plus général, en admettant pour $v(x)$ des valeurs qui soient, non plus des vecteurs ordinaires, mais des multivecteurs d'une dimension donnée k dans l'espace à n dimensions. Nous supposerons toujours que les valeurs de $v(x)$ sont des multivecteurs simples de grandeur unité, donc qu'elles se laissent exprimer comme le produit extérieur de k vecteurs v_1, $v_2, \ldots, v_k$ orthogonaux normés, dépendants du point x considéré. On aura à interpréter x' comme un jacobien convenable, au lieu d'une dérivée.

En outre, on peut très bien concevoir des cas où $v(x)$ serait multiforme. Nous y reviendrons dans les paragraphes suivants. Par exemple, on peut s'imaginer que le mouvement d'un certain gaz résulte, par une simple superposition, de deux mouvements différents auxquels seraient sujets deux gaz raréfiés. On obtiendrait dans ce cas, à chaque point x, deux valeurs $v_1(x)$, $v_2(x)$ pour la vitesse; on aura alors à leur assigner des poids bien déterminés, qui indiqueront dans quelles proportions la combinaison des deux gaz se dirigera dans les deux directions $v_1(x)$, $v_2(x)$. Plus généralement, on pourra associer, à tout point x, un ensemble $V(x)$ de vecteurs ainsi qu'une mesure unité sur cet ensemble: le fluide se dirigera, au point x, simultanément dans les directions appartenant à $V(x)$, dans des proportions déterminées par la mesure-unité correspondante.

3. Les variétés de contact générales.

Le problème de l'intégration de (2.1), ou du système analogue k-dimensionnel dans notre espace à n dimensions, est posé d'une façon nette, lorsqu'on se borne aux variétés paramétriques classiques.

Ce même problème prendra un aspect tout autre, si l'on donne au mot « variété » un sens qui, de nos jours, semble préférable. En effet, cette notion n'est plus alors l'analogue des notions géométriques traditionnelles de courbe et de surface.