3. Les variétés de contact générales.

où chaque μ_α s'annule en dehors d'un ensemble orienté E_α correspondant, et coïncide sur E_α, avec la longueur des ensembles rectifiables.

Dans la suite nous nous permettrons encore d'interpréter (2.1) dans un sens plus général, en admettant pour $v(x)$ des valeurs qui soient, non plus des vecteurs ordinaires, mais des multivecteurs d'une dimension donnée k dans l'espace à n dimensions. Nous supposerons toujours que les valeurs de $v(x)$ sont des multivecteurs simples de grandeur unité, donc qu'elles se laissent exprimer comme le produit extérieur de k vecteurs v_1, $v_2, \ldots, v_k$ orthogonaux normés, dépendants du point x considéré. On aura à interpréter x' comme un jacobien convenable, au lieu d'une dérivée.

En outre, on peut très bien concevoir des cas où $v(x)$ serait multiforme. Nous y reviendrons dans les paragraphes suivants. Par exemple, on peut s'imaginer que le mouvement d'un certain gaz résulte, par une simple superposition, de deux mouvements différents auxquels seraient sujets deux gaz raréfiés. On obtiendrait dans ce cas, à chaque point x, deux valeurs $v_1(x)$, $v_2(x)$ pour la vitesse; on aura alors à leur assigner des poids bien déterminés, qui indiqueront dans quelles proportions la combinaison des deux gaz se dirigera dans les deux directions $v_1(x)$, $v_2(x)$. Plus généralement, on pourra associer, à tout point x, un ensemble $V(x)$ de vecteurs ainsi qu'une mesure unité sur cet ensemble: le fluide se dirigera, au point x, simultanément dans les directions appartenant à $V(x)$, dans des proportions déterminées par la mesure-unité correspondante.

3. Les variétés de contact générales.

Le problème de l'intégration de (2.1), ou du système analogue k-dimensionnel dans notre espace à n dimensions, est posé d'une façon nette, lorsqu'on se borne aux variétés paramétriques classiques.

Ce même problème prendra un aspect tout autre, si l'on donne au mot « variété » un sens qui, de nos jours, semble préférable. En effet, cette notion n'est plus alors l'analogue des notions géométriques traditionnelles de courbe et de surface.

Elle correspond plutôt aux notions analytiques fournies par les opérations d'intégration curviligne, ou superficielle. Nous avons le droit d'identifier les courbes et les surfaces avec ces opérations-là, puisque c'est par elles seulement que nous les utilisons en analyse. Et même, ce n'est pas seulement un droit, c'est presque un devoir: il faut éliminer de ces notions ce que nous n'utiliserons pas. Ainsi, une variété moderne sera une fonctionnelle linéaire sur un espace convenable d'intégrants.

Si l'on choisit pour ces derniers les formes différentielles, à k dimensions dans l'espace à n dimensions, une fonctionnelle linéaire T arbitraire sur leur espace, est dite aujourd'hui courant de de Rham, ou simplement, courant. Dans la suite, c'est le seul genre de courant que nous introduirons, et il s'agira surtout des courants bornés, à supports compacts.

Si l'on prend pour intégrants, plus généralement, les fonctions continues f du point x et de la direction k-dimensionnelle j, c'est-à-dire du multivecteur simple k-dimensionnel j, de grandeur unité, dans l'espace à n dimensions, les fonctionnelles linéaires $\mathscr{L}$, telles que $\mathscr{L}(f) \geqslant 0$ pour f non négatif, sont dites variétés k-dimensionnelles généralisées. La restriction de $\mathscr{L}$ aux intégrants du type $f(x, j) = j\,f(x)$ sera dite son substratum: nous identifierons la notion de substratum avec celle d'un courant borné à support compact; cela veut dire, tout simplement, que nous ne distinguons pas entre un intégrant du type $j\,f(x)$ et la forme différentielle possédant le même coefficient; d'ailleurs nous ne distinguerons ni l'un ni l'autre, du coefficient $f(x)$ qui les détermine tous deux, et dont les valeurs sont donc des multivecteurs composés k-dimensionnels. Notons réciproquement que tout courant borné à support compact se laisse exprimer comme le substratum d'une variété généralisée $\mathscr{L}$, qui ne sera d'ailleurs pas unique. On pourra toujours ajouter, par exemple, à $\mathscr{L}$ une variété généralisée à substratum nul ou, comme nous l'appellerons, une variété singulière.

Il serait commode, à certains égards, d'admettre seuls les intégrants à support compact. Cela conduirait à une notion un peu plus générale de variété. Elle comprendrait, par exemple, celle d'un mouvement fluide stationnaire: en effet, la description eulérienne fournit la fonctionnelle

$$\mathscr{L}(f) = \int f[x, v(x)]\, d\mu\,, \tag{3.1}$$

laquelle détermine μ de façon unique, et $v(x)$ sauf dans un ensemble de mesure μ nulle. La notion de variété généralisée qu'on obtiendrait ainsi serait même essentiellement équivalente à celle d'un mouvement fluide stationnaire, ou à son analogue k-dimensionnelle, si l'on se permet de prendre $v(x)$ multiforme, comme à la fin du paragraphe précédent. La représentation de F. Riesz de la fonctionnelle $\mathscr{L}$, transformée par une variante du théorème de Fubini [10], fournit, en effet, une formule analogue à (3.1), dans laquelle l'expression sous le signe de l'intégrale sera remplacée par une valeur moyenne de $f(x, j)$ par rapport à une mesure-unité, portant sur un ensemble $V(x)$ de valeurs de j, au point x.

Notons que la formule (3.1), ou son analogue plus générale, serviront à définir l'intersection d'une variété généralisée $\mathscr{L}$ avec un ensemble borélien E quelconque de l'espace des x. Il suffit de remplacer l'intégrale sur tout cet espace par celle sur l'ensemble E. Nous désignerons une telle intersection par $\mathscr{L} \cap E$. La mesure μ s'obtient en choisissant l'intégrant $f = 1$: nous la nommerons, pour des valeurs particulières $k = 1$, $k = 2, \ldots,$ longueur, aire, ..., et dans le cas général, étendue de $\mathscr{L} \cap E$.

Lorsque μ s'annule au-dehors d'un seul point x_0, nous disons que $\mathscr{L}$ est une micro-variété, concentrée en ce point. La formule analogue à (3.1) peut s'écrire

$$\mathscr{L}(f) = \int \mathscr{M}(f)\, d\mu \tag{3.1a}$$

où $\mathscr{M}(f)$ est une micro-variété, concentrée au point x par rapport auquel nous intégrons. Il va sans dire que $\mathscr{M}(f)$, en tant que fonction de x, aura à remplir des conditions convenables de mesurabilité.

Une variété généralisée $\mathscr{L}$ sera considérée solution du système (2.1), ou du système analogue k-dimensionnel, et nous l'appellerons variété de contact de ce système, si la fonctionnelle correspondante ne dépend que des valeurs prises par les intégrants f aux points (x, j) de la forme $[x, v(x)]$, ou, dans le cas multiforme, aux points (x, j) tels que $j \in V(x)$. En outre, on considérera comme solution un courant T, borné et à support compact, et on le nommera courant de contact, si et seulement si, T est le substratum d'une variété généralisée $\mathscr{L}$, telle que $\mathscr{L}$ soit une solution.

En utilisant encore la représentation de F. Riesz, on détermine sans peine toutes les solutions dans ce sens général: si $v(x)$ est uniforme, on trouve que $\mathscr{L}$ sera une solution, si et seulement si, il existe une mesure μ telle que $\mathscr{L}$ soit donné par (3.1). De même, T sera une solution, si et seulement si,

$$(3.2) \qquad T(f) = \int v(x) f(x)\, d\mu \; .$$

Dans le cas multiforme, il n'y a qu'à substituer, aux expressions sous les signes d'intégrales dans (3.1) et (3.2), des moyennes $\mathscr{M}(f)$ convenables, de $f(x, j)$ ou de $j\, f(x)$, prises au point x par rapport aux valeurs de j dans $V(x)$. On utilise alors la formule (3.1a).

Or cela signifie que la fonctionnelle $\mathscr{L}$ ou T fournit une solution dès qu'elle se laisse déterminer sous la forme (3.1) ou (3.2), par la description eulérienne d'un mouvement fluide stationnaire quelconque, ayant la même vitesse $v(x)$, uniforme ou non, que nous interprétons d'une façon convenable dans le cas k-dimensionnel.

Nous avons donc à identifier tout bonnement les variétés de contact avec les différents mouvements fluides stationnaires de vitesse $v(x)$. C'est la solution complète. En sommes-nous plus avancés ?

Serait-ce peut-être une espèce de tautologie ?

En partant d'une description eulérienne, on aboutit à d'autres descriptions du même genre, et nullement à celle de Lagrange. De toutes façons, on ne voit guère comment en tirer les solutions classiques élémentaires.

Il semblerait qu'à force de généraliser la solution, on ait perdu le problème.

En réalité, celui-ci a changé de forme: on le retrouve en demandant quelles solutions ont une structure particulière. On cherchera quelles solutions se réduisent aux solutions classiques ou encore, ce qui nous intéresse davantage, quelles solutions sont capables d'une description lagrangienne. Cette dernière question se rattache donc, d'une façon fondamentale, à la résolution du système (2.1).