7. Les variétés greffées.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

pourra toujours conduire à une microvariété $\mathscr{M}$ possédant la propriété suivante: $\mathscr{M}$ se laisse exprimer comme un mélange de micropolytopes $\mathscr{M}_\alpha$, où chaque $\mathscr{M}_\alpha$ est m fois greffable, et où l'entier m et la résultante de $\mathscr{M}_\alpha$ sont indépendants de α.

7. Les variétés greffées.

Nous dirons d'une variété généralisée $\mathscr{L}$ qu'elle possède une représentation en pointillé $x(w)$, greffée m fois, si $\mathscr{L}$ a la forme (3.1)a, où la microstructure $\mathscr{M}$ est m fois greffable, et si, de plus, $\mathscr{L}$ a le même substratum qu'une variété généralisée, possédant, au sens du paragraphe 5, m fois la représentation en pointillé $x(w)$. Remarquons que pour $m = 0$ l'application $x(w)$ ne joue aucun rôle, et que les variétés généralisées $\mathscr{L}$ qui possèdent une telle représentation greffée m fois, se réduisent alors aux variétés singulières.

Nous nommerons variété greffée, une variété généralisée $\mathscr{L}$ se laissant exprimer comme une somme, dénombrable au plus, de termes $\mathscr{L}_\nu$, chacun desquels possède, pour un m_ν correspondant, une représentation en pointillé $x_\nu(w)$ correspondante, greffée m_ν fois. Si $\mathscr{L}$ est de contact, nous la nommerons variété de contact greffée.

Dans [12], les variétés greffées sont dites variétés généralisées admissibles B. Nous y avons démontré qu'elles constituent la fermeture, dans un certain sens, des polytopes, et c'est dans ce même sens que la courbe généralisée (5.3) se laisse approcher par des zigzags finis. A cet égard, ce sont les variétés greffées, plutôt que les variétés généralisées B, qui auront à jouer, vis-à-vis des variétés B, le rôle analogue aux courbes généralisées, vis-à-vis des courbes rectifiables.

Ce qui nuit un peu à cette analogie, c'est qu'elle ne tient pas compte d'effets très différents que peut produire l'addition d'une variété singulière [1]. Ce n'est là qu'une partie des complications

---

1) Après une telle addition, les variétés greffées restent variétés greffées, les variétés généralisées B restent variétés généralisées B, tandis que les courbes généralisées n'ont pas la propriété analogue. La même opération peut aussi, cas échéant, transformer en variété greffée, une variété généralisée B, tout comme elle peut changer radicalement le caractère d'une variété, même très simple, en topologie élémentaire: un tore devient du type de la sphère, quand on ajoute une paire convenable de disques superposés, d'orientations opposées.

qui se présentent, pour $2 \leqq k \leqq n-2$ surtout: d'ailleurs, pour $k = 1$, on pourra y chercher l'explication mathématique de phénomènes de turbulence.

Les variétés greffées sont évidemment un cas particulier des variétés généralisées B. Nous ne possédons, à vrai dire, pas d'exemple de variété généralisée B non greffée. Un tel exemple existe probablement: nous avons récemment résolu affirmativement une question dans le même ordre d'idées [21 V]. D'autre part, en utilisant la remarque à la fin du paragraphe précédent, on peut démontrer qu'en ajoutant, à une variété généralisée B, une variété singulière d'étendue aussi petite que l'on voudra, on aboutit à un mélange de variétés greffées.

8. Les variétés de contact lagrangiennes.

Il serait bon que nous précisions la notion de mélange. Nous nous permettrons donc d'intercaler quelques remarques qui se rapportent à nos conventions de mesurabilité. Soit Λ un ensemble de variétés généralisées $\mathscr{L}_\alpha$; nous conviendrons de considérer les suffixes α comme des étiquettes pour distinguer les $\mathscr{L}_\alpha$ dans Λ, et nous désignerons par $d\alpha$ une mesure dans Λ, ou, ce qui revient au même, dans l'espace des étiquettes α. Une variété généralisée se laissant exprimer sous la forme

$$\mathscr{L}(f) = \int \mathscr{L}_\alpha(f)\, d\alpha \,, \tag{8.1}$$

sera dite mélange des $\mathscr{L}_\alpha$, ou mélange de Λ. Or nous avons convenu de ne considérer que des ensembles boréliens, ce qui présuppose une topologie.

Expliquons-nous.

Nous allons voir dans un instant qu'on peut se borner aux variétés généralisées situées dans un cube fixe, c'est-à-dire qui ont une intersection nulle avec le complément de ce cube [1]. L'espace de telles variétés généralisées sera doué de la topologie faible en ce qui concerne la convergence des suites: on dit que la suite $\mathscr{L}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ converge si celle des valeurs $\mathscr{L}_\nu(f)$ converge pour chaque intégrant f. Cette topologie est équivalente

[1]) Plus généralement, nous dirons d'une variété généralisée $\mathscr{L}$ qu'elle possède un support borélien E dans l'espace des x, si son intersection avec le complément s'annule.