**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 11 (1965)

**Heft:** 2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** REMARQUES CONCERNANT UN PROBLÈME DE REPRÉSENTATION DES VARIÉTÉS GÉNÉRALISÉES, ET SON RAPPORT AU MOUVEMENT STATIONNAIRE D'UN FLUIDE

**Autor:** Young, L. C.

**Kapitel:** 8. Les variétés de contact lagrangiennes.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-39977

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 16.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

qui se présentent, pour $2 \leqq k \leqq n - 2$ surtout: d'ailleurs, pour $k = 1$, on pourra y chercher l'explication mathématique de phénomènes de turbulence.

Les variétés greffées sont évidemment un cas particulier des variétés généralisées $B$. Nous ne possédons, à vrai dire, pas d'exemple de variété généralisée $B$ non greffée. Un tel exemple existe probablement: nous avons récemment résolu affirmativement une question dans le même ordre d'idées [21 V]. D'autre part, en utilisant la remarque à la fin du paragraphe précédent, on peut démontrer qu'en ajoutant, à une variété généralisée $B$, une variété singulière d'étendue aussi petite que l'on voudra, on aboutit à un mélange de variétés greffées.

## 8. Les variétés de contact lagrangiennes.

Il serait bon que nous précisions la notion de mélange. Nous nous permettrons donc d'intercaler quelques remarques qui se rapportent à nos conventions de mesurabilité. Soit $\Lambda$ un ensemble de variétés généralisées $\mathscr{L}_\alpha$; nous conviendrons de considérer les suffixes $\alpha$ comme des étiquettes pour distinguer les $\mathscr{L}_\alpha$ dans $\Lambda$, et nous désignerons par $d\alpha$ une mesure dans $\Lambda$, ou, ce qui revient au même, dans l'espace des étiquettes $\alpha$. Une variété généralisée se laissant exprimer sous la forme

$$\mathscr{L}(f) = \int \mathscr{L}_\alpha(f)\, d\alpha\,, \tag{8.1}$$

sera dite mélange des $\mathscr{L}_\alpha$, ou mélange de $\Lambda$. Or nous avons convenu de ne considérer que des ensembles boréliens, ce qui présuppose une topologie.

Expliquons-nous.

Nous allons voir dans un instant qu'on peut se borner aux variétés généralisées situées dans un cube fixe, c'est-à-dire qui ont une intersection nulle avec le complément de ce cube [1]. L'espace de telles variétés généralisées sera doué de la topologie faible en ce qui concerne la convergence des suites: on dit que la suite $\mathscr{L}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ converge si celle des valeurs $\mathscr{L}_\nu(f)$ converge pour chaque intégrant $f$. Cette topologie est équivalente

[1]) Plus généralement, nous dirons d'une variété généralisée $\mathscr{L}$ qu'elle possède un support borélien $E$ dans l'espace des $x$, si son intersection avec le complément s'annule.

à celle d'une métrique particulière, que nous appellerons métrique de McShane : sa définition se calque sur [6, p. 534]. Nous n'utiliserons cette métrique ici guère que pour en tirer la notion d'ensemble borélien et celles de mesurabilité, etc., que nous avons convenu de sous-entendre : donc, n'en parlons plus.

D'accord avec la topologie faible, la formule (8.1) signifie

$$\mathscr{L}(f) = \int \mathscr{L}_\alpha (f)\, d\alpha,$$

pour chaque intégrant $f$. Puisque $\mathscr{L}$ est situé dans un cube fini [8 (3.1)], presque chaque $\mathscr{L}_\alpha$ sera situé dans ce même cube. On pourra donc se borner à la partie de $\Lambda$ qui comprend des variétés généralisées situées dans ce cube.

Cela étant, nous dirons d'une variété généralisée $\mathscr{L}$ qu'elle est, par rapport à $\Lambda$, lagrangienne, si elle se laisse exprimer sous la forme (8.1), c'est-à-dire comme un mélange de $\Lambda$. Dans le cas où, pour la mesure $d\alpha$, les membres $\mathscr{L}_\alpha$ de $\Lambda$, sauf ceux d'une sous-classe éventuelle de mesure $d\alpha$ nulle, possèdent des supports boréliens disjoints, $\mathscr{L}$ sera dite, par rapport à $\Lambda$, lagrangienne par décomposition.

Nous écrirons $A\ (\Lambda)$, $A_d\ (\Lambda)$ respectivement, pour les classes de variétés généralisées, qui sont, par rapport à $\Lambda$, lagrangiennes, ou lagrangiennes par décomposition. Nous dirons simplement : variété lagrangienne, variété lagrangienne par décomposition, lorsque $\Lambda$ se réduit à la classe des variétés $B$. Les classes correspondantes seront désignées par $A$, $A_d$. Dans le cas d'une variété de contact, nous dirons variété de contact lagrangienne, etc. Nous dirons aussi variété non lagrangienne, etc., pour une variété généralisée qui ne possède pas la propriété lagrangienne correspondante, et variété lagrangienne généralisée, etc., lorsque $\Lambda$ est la classe des variétés généralisées $B$ : dans ce dernier cas, nous écrirons $A_G$, $A_{Gd}$ pour $A\ (\Lambda)$, $A_d\ (\Lambda)$. Nous dirons encore variété lagrangienne greffée, etc., lorsque $\Lambda$ est la classe des variétés greffées, et nous écrirons dans ce cas, pour les deux classes obtenues, $A_g$, $A_{gd}$.

Nous dirons enfin, en abrégeant au besoin comme ci-dessus, que $\mathscr{L}$ est, par rapport à $\Lambda$, presque lagrangienne, et nous remplacerons dans les classes correspondantes $A$ par $A^+$, s'il existe, pour tout $\varepsilon$ positif, une variété singulière $S_\varepsilon$, dont l'étendue est

inférieure à $\varepsilon$, telle que $\mathscr{L} + S_\varepsilon$, soit, par rapport à $A$, lagrangienne.

Désignons, pour une classe quelconque $\mathscr{K}$ de nos variétés généralisées, par $\tau\mathscr{K}$, $\partial\mathscr{K}$ les classes correspondantes de substrata $\tau\mathscr{L}$, et de frontières $\partial\mathscr{L}$, de membres $\mathscr{L}$ de $\mathscr{K}$. Les expressions $\tau^{-1}\,\tau\mathscr{K}$, $\partial^{-1}\,\partial\mathscr{K}$ désigneront les classes de variétés généralisées chacune desquelles a le même substratum, ou la même frontière, qu'un membre correspondant de $\mathscr{K}$.

Nous aurons les inclusions suivantes:

$$A_\alpha \subset A \subset A_g \subset A_G \subset A_G^+ \subset \tau^{-1}\,\tau A_G^+ \subset \partial^{-1}\,\partial A_G^+. \tag{8.2}$$

Or, on remarque de suite que

$$\tau^{-1}\,\tau A_G^+ = \tau^{-1}\,\tau A, \qquad \partial^{-1}\,\partial A_G^+ \partial = {}^{-1}\,\partial A, \tag{8.3}$$

et que, d'après ce qui a été dit à la fin du paragraphe 4, la classe $\partial^{-1}\,\partial A$ est celle des variétés généralisées qui possèdent une frontière $A$, c'est-à-dire les mêmes frontières que des $\sigma$-polytopes avec poids. Quant à la classe $\tau^{-1}\,\tau A$, nous dirons pour abréger que ses membres sont les variétés à substratum lagrangien. Cette classe n'est pas universelle: elle est comprise dans la classe des variétés généralisées de frontière $A$, et l'on remarquera qu'il existe des variétés généralisées sans frontière $A$, par exemple la variété généralisée $\mathscr{L}$ définie par la fonctionnelle $\mathscr{L}(f) = f(x_0, j_0,)$ où $x_0$, $j_0$ désignent un point et un multivecteur fixes. (On supposera $j_0$ simple et de grandeur unité.) Ainsi il existe certainement des variétés à substratum non lagrangien: pour le mouvement des fluides, on constate donc que la description eulérienne est bien plus générale que celle de Lagrange; nous reviendrons cependant sur cette question dans le paragraphe suivant.

Remarquons encore, d'après ce qui a été dit à la fin du paragraphe précédent, que

$$A_G^+ = A_g^+. \tag{8.4}$$

Nous pouvons donc récrire (8.2), en lui ajoutant quelques inclusions évidentes, comme suit:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A_d \subset A \subset A_g \\ A_d \subset A_{gd} \subset A_g \end{array}\right\} \subset A_G \\ A_{gd} \subset A_{Gd} \subset A_G \end{array}\right\} \subset A_g^+ \subset \tau^{-1}\,\tau A \subset \partial^{-1}\,\partial A \end{array}\right. \tag{8.5}$$

On remarquera sans peine que certaines des inclusions (8.5) sont strictes, mais il est possible que d'autres se réduisent à des égalités.

Les mêmes inclusions sont encore valables, si l'on désigne par les symboles $A_d$, $A$, $A_g$, etc., les classes correspondantes de variétés de contact d'un système donné d'équations différentielles de la forme (2.1), ou d'un système analogue $k$-dimensionnel.

Pour bien comprendre un tel système, et pour bien comprendre la notion de variété, au sens généralisé que nous utilisons ici, il faudra avant tout, selon la remarque à la fin du paragraphe 3, étudier la question de savoir quelles inclusions (8.5) se réduisent peut-être à des égalités. Par exemple, l'égalité $\partial_g^+ = A^{-1}\,\partial A$ signifierait, pour les variétés de contact, que toute solution de frontière $A$ de (2.1) se réduit à une variété de contact, presque lagrangienne, greffée. Ensuite, pour les inclusions strictes, on cherchera à caractériser chaque fois les membres de la classe étroite parmi ceux de la classe large.

## 9. L'équation de continuité des fluides.

C'est d'abord l'inclusion finale de (8.5) qui nous intéresse. Se réduirait-elle à une égalité ?

Pour simplifier, bornons-nous aux variétés généralisées closes faisant partie des classes considérées. Cette réduction n'est possible, à vrai dire, que pour $k < n$, nous y reviendrons après ce paragraphe. Rappelons qu'une variété généralisée est dite close, lorsque sa frontière s'annule.

La question que nous nous sommes posée devient la suivante: une variété généralisée close a-t-elle le même substratum qu'une variété lagrangienne ? En d'autres termes: un substratum clos est-il lagrangien ? Nous allons donner à cette question une autre forme, qui nous rapproche encore de la mécanique classique des fluides.

Nous aurons besoin de quelques notations.

Nous utiliserons pour la multiplication extérieure des multivecteurs le signe $\times$. On définit alors la comultiplication $\otimes$ par la formule $a \otimes b = (a^* \times b)^*$, où l'astérisque désigne la normale. Rappelons que la normale $a^*$ d'un $k$-vecteur $a$ se définit