

# SUR LES POLYGONES DE PÉRIMÈTRE MAXIMUM INSCRITS DANS UNE ELLIPSE

Autor(en): **Loeffler, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-40724>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR LES POLYGONES DE PÉRIMÈTRE MAXIMUM INSCRITS DANS UNE ELLIPSE

par A. LOEFFLER

THÉORÈME I. — Sur tout arc  $UV$  d'une ellipse  $\mathcal{C}$  il y a un point  $X$  et un seul tel que le contour polygonal  $UXV$  soit maximum.

*Démonstration.* — Soient  $UMV$  et  $UNV$  les deux arcs de  $\mathcal{C}$  sous-tendus par la corde  $UV$ .  $O$  désignant le milieu du segment  $UV$ , posons :

$$UO = OV = c > 0$$

Prenons  $O$  comme origine, et  $OV$  comme axe des  $x$  d'un système de coordonnées rectangulaires.  $\lambda$  désignant une valeur positive quelconque, l'équation :

$$\mathcal{E}_\lambda \equiv \lambda^2 x^2 + (\lambda^2 + c^2) y^2 - \lambda^2 (\lambda^2 + c^2) = 0$$

représente l'une des ellipses homofocales qui ont  $U$  et  $V$  comme foyers.

Les extrémités  $A'$  et  $A$  du grand axe de  $\mathcal{E}_\lambda$  sont sur l'axe des  $x$ , et extérieures à  $\mathcal{C}$ , puisque l'on a :

$$|\overline{A'O}| = |\overline{OA}| = \sqrt{\lambda^2 + c^2} > c.$$

Soient  $L$  le point de l'arc  $UNV$  situé sur l'axe des  $y$ , et  $\overline{OB'}$  un segment variable de cet axe, de même sens que  $\overline{OL}$ . Posons  $|\overline{OB'}| = \lambda$ . Le point  $B'$  est une des extrémités du petit axe de l'ellipse  $\mathcal{E}_\lambda$ .

Supposons qu'on ait :

$$\lambda = |\overline{OB'}| < |\overline{OL}|.$$

Le point  $B'$  est alors à l'intérieur de  $\mathcal{C}$ .  $A'$  étant à l'extérieur de

cette courbe, l'arc  $A'B'$  de  $\mathcal{E}_\lambda$  rencontre  $\mathcal{C}$  en un point  $S$  situé entre  $A'$  et  $B'$ . De même  $\mathcal{E}_\lambda$  rencontre  $\mathcal{C}$  en un point  $R$  situé entre  $B'$  et  $A$ .

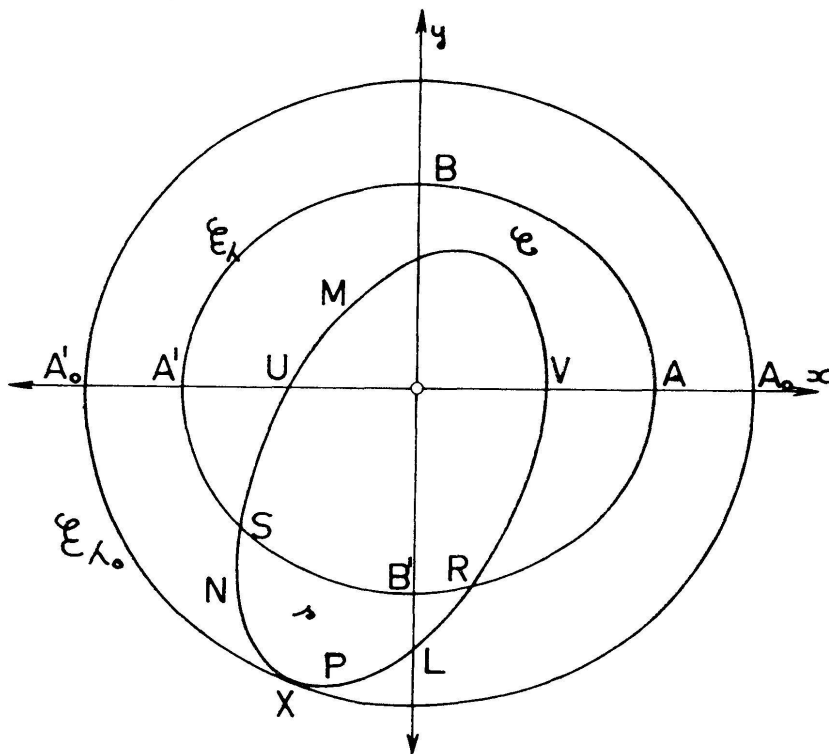


Fig. 1

Désignons par  $s$  la surface comprise entre l'arc  $RS$  de  $\mathcal{E}_\lambda$  et l'arc  $SR$  de  $\mathcal{C}$ . Si l'on a:  $\lambda_2 > \lambda_1$ , on sait que l'ellipse  $\mathcal{E}_{\lambda_2}$  enveloppe complètement l'ellipse homofocale  $\mathcal{E}_{\lambda_1}$ . Il s'ensuit que, si  $\lambda$  varie en croissant d'une manière continue, la surface  $s$  ira en diminuant. Elle n'existe plus pour des valeurs suffisamment grandes de  $\lambda$  pour lesquelles  $\mathcal{E}_\lambda$  enveloppe  $\mathcal{C}$ . Il y a donc une valeur  $\lambda_0$  de  $\lambda$  pour laquelle  $s$  se réduit à 0. Ceci n'est possible que si les deux points  $S$  et  $R$  sont confondus en un même point  $X$ ; et par suite  $\mathcal{E}_{\lambda_0}$  est tangente à  $\mathcal{C}$  en  $X$ . Il n'y a qu'une seule ellipse qui jouisse de cette propriété. Pour  $\lambda < \lambda_0$ ,  $\mathcal{E}_\lambda$  coupe  $s$ , et par suite aussi l'arc  $UNV$  en deux points  $R$  et  $S$  distincts. Pour  $\lambda > \lambda_0$ ,  $\mathcal{E}_\lambda$  enveloppant  $\mathcal{E}_{\lambda_0}$  enveloppe aussi l'arc  $UNV$  et ne peut ni le couper, ni lui être tangente.

Si  $2a$  est la longueur du grand axe de  $\mathcal{E}_{\lambda_0}$ , on a:  $UX + XV = 2a$ , puisque  $X$  est sur  $\mathcal{E}_{\lambda_0}$ . Tous les points de l'arc  $UNV$  distincts du point  $X$  sont à l'intérieur de  $\mathcal{E}_{\lambda_0}$ . Donc, si  $P$  est un de ces points, on a:  $UP + PV < 2a$ , ou:  $UX + XV > UP$

+  $PV$ , ce qui démontre le théorème I. De la même manière on établit l'existence sur l'arc  $UMV$  d'un point unique  $Y$  tel que la longueur du contour  $UY + YV$  soit maximum.

THÉORÈME 2. — *Sur tout arc  $UNV$  d'une ellipse  $\mathcal{E}$  il y a toujours un point  $Z$  et un seul tel que l'angle  $UZV$  admette comme bissectrice intérieure la normale à  $\mathcal{E}$  en ce point.*

En effet, supposons qu'il existe un pareil point  $Z$ . Considérons l'ellipse  $\mathcal{E}$  dont les foyers sont les points  $U$  et  $V$  et qui passe par  $Z$ . On sait que la bissectrice intérieure de l'angle  $UZV$  est la normale à  $\mathcal{E}$  au point  $Z$ . Mais, par hypothèse, cette bissectrice est aussi la normale à  $\mathcal{C}$  en  $Z$ . Donc  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{C}$  ont la même tangente au point commun  $Z$ . On a vu, en démontrant le théorème I, que, parmi les ellipses de foyers  $U$  et  $V$ , il y en a une et une seule  $\mathcal{E}_{\lambda_0}$  qui soit tangente à l'arc  $UNV$  en un point  $X$ . D'après le théorème I,  $\mathcal{E}$  se confond donc avec  $\mathcal{E}_{\lambda_0}$  et  $Z$  avec  $X$ . On sait que ce point existe toujours et qu'il est unique. Le théorème est donc démontré.

Nous conviendrons de dire, par la suite, que le point  $X$  est le point d'impact sur l'arc  $UNV$ . En effet, on déduit du théorème 2 que si  $\mathcal{C}$  est la bande d'un billard elliptique,  $X$  représente le point où une bille partant de  $U$  doit être renvoyée par la bande pour parvenir en  $V$  après avoir touché une fois l'arc  $UNV$ .

$X$  est aussi le point où un rayon lumineux issu de  $U$  doit rencontrer  $\mathcal{C}$  pour atteindre le point  $V$  après une seule réflexion sur l'arc  $UNV$  qu'on suppose être la projection orthogonale d'un miroir cylindrique.

Remarquons que si les points  $U$  et  $V$  sont permutés, le point  $X$  ne change pas.

DÉFINITION. — Etant donnés une ellipse  $\mathcal{C}$  et un entier  $n$  supérieur à 2, nous dénommerons polygone  $\sigma_n$  de  $\mathcal{C}$  tout polygone convexe de  $n$  côtés, inscrit dans  $\mathcal{C}$  et tel que chacun de ses sommets soit le point d'impact de l'arc limité par les deux sommets voisins.

Il faut démontrer qu'il existe de pareils polygones quel que soit  $n$ . C'est ce que nous établirons à l'aide des deux théorèmes suivants.



THÉORÈME 3. — *Etant donné un entier  $n$ , plus grand que 2, et une ellipse  $\mathcal{C}$ , il existe toujours une ellipse homofocale  $\Gamma_n$  et une seule, telle que l'on puisse inscrire dans  $\mathcal{C}$  un polygone convexe de  $n$  côtés circonscrit à  $\Gamma_n$ .*

*Démonstration.* — Soient  $F$  et  $F'$  les foyers de l'ellipse  $\mathcal{C}$ , et  $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$  son équation, où l'on suppose  $0 < b < a$ . Pour toute valeur de  $\lambda$  comprise entre 0 et  $b^2$ , l'équation:

$$\mathcal{E}_\lambda \equiv (b^2 - \lambda)x^2 + (a^2 - \lambda)y^2 - (a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) = 0$$

représente l'une quelconque des ellipses homofocales qui sont intérieures à  $\mathcal{C}$ . Nous supposons que  $\Delta\lambda$  est positif. On sait alors que l'ellipse  $\mathcal{E}_{\lambda+\Delta\lambda}$  est intérieure à  $\mathcal{E}_\lambda$ . Ayant choisi arbitrairement  $P$ , inscrivons dans  $\mathcal{C}$  les deux lignes polygonales convexes de  $n$  côtés:

$$\mathcal{L} = POQ \dots S, \text{ circonscrite à } \mathcal{E}_\lambda, \text{ et}$$

$$\mathcal{L}' = PO'Q' \dots S', \text{ circonscrite à } \mathcal{E}_{\lambda+\Delta\lambda}.$$

On entendra par  $\widehat{PO}, \widehat{OQ}, \dots, \widehat{RS}; \widehat{PO'}, \widehat{O'Q'}, \dots, \widehat{R'S'}$ , les plus petits des arcs de  $\mathcal{C}$  sous-tendus par la corde correspondante, et on supposera qu'ils sont tous décrits dans un même sens choisi comme sens positif. Le point  $O'$  est situé sur le prolongement de l'arc  $PO$ , puisque  $PO'$  est tangente à  $\mathcal{E}_{\lambda+\Delta\lambda}$  qui est intérieure à  $\mathcal{E}_\lambda$ .

On a donc:

$$\widehat{OO'} > 0, \text{ et } \widehat{PO'} > \widehat{PO}.$$

Menons la corde  $O'Q''$  de  $\mathcal{C}$  tangente à  $\mathcal{E}_\lambda$ , et telle que l'arc  $O'Q''$  soit positif. Si l'on imagine que la droite  $OQ$  roule sur  $\mathcal{E}_\lambda$  jusqu'à coïncider avec la droite  $O'Q''$ , il est évident que l'arc  $QQ''$  est positif puisque l'arc  $OO'$  l'est.

D'autre part,  $O'Q'$  étant tangente à  $\mathcal{E}_{\lambda+\Delta\lambda}$ , donc sécante à  $\mathcal{E}_\lambda$ , on a:  $\widehat{Q''Q'} > 0$ . Donc l'arc  $POQ$  est plus petit que l'arc  $PO'Q'$ . En poursuivant ce raisonnement on obtient:

$$\widehat{POQ \dots S} < \widehat{PO'Q' \dots S'}$$

Si  $s(\lambda)$  désigne la longueur de l'arc sous-tendu par  $\mathcal{L}$ , on a donc l'inégalité:

$$s(\lambda) < s(\lambda + \Delta\lambda)$$

Il s'ensuit que  $s(\lambda)$  croît lorsque  $\lambda$  croît de 0 à  $b^2$ .

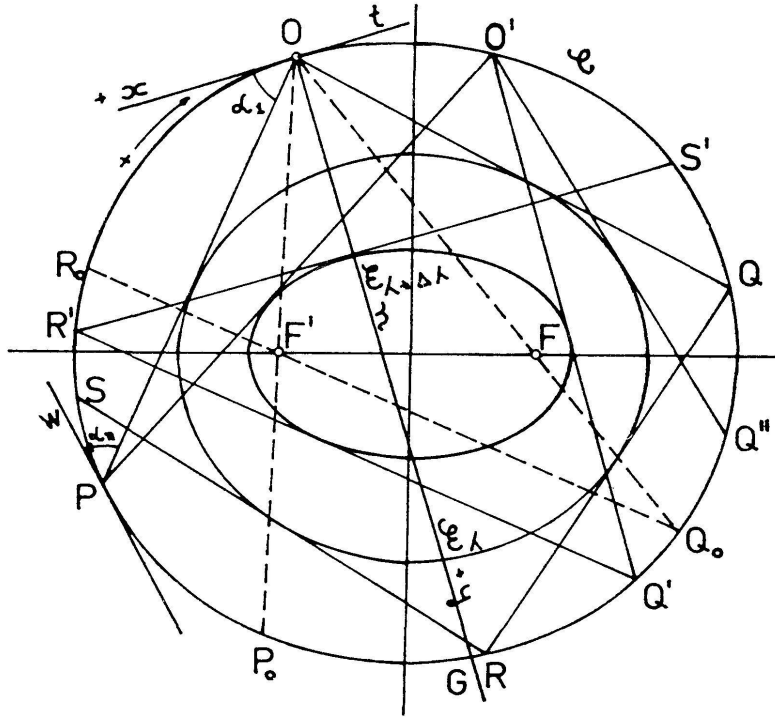


Fig. 2

Soit  $O$  un quelconque des sommets de  $\mathcal{L}$ . Si on rapporte  $\mathcal{C}$  à la tangente  $t$  et à la normale  $n$  en  $O$ , son équation est de la forme:

$$y^2 + 2\beta xy + \gamma x^2 + \delta y = 0$$

où l'on doit avoir:  $\beta^2 - \gamma < 0$ , puisque  $\mathcal{C}$  est une ellipse, et par suite:  $\gamma > 0$ . On peut choisir sur  $t$  le sens de l'axe  $Ox$  de façon que  $\alpha_1 = \widehat{Ot, OP}$  soit un angle aigu. Sur l'axe des  $y$ , on choisira un sens tel qu'on ait:  $\overline{OG} > 0$ , où  $G$  désigne l'extrémité sur  $\mathcal{C}$  de la normale  $n$ . De l'équation de  $C$  on tire:  $-\overline{OG} = \delta < 0$ , et, par la substitution:

$$\begin{aligned} x &= OP \cos \alpha_1 \\ y &= OP \sin \alpha_1, \end{aligned}$$

$$OP = - \frac{\delta \sin \alpha_1}{\sin^2 \alpha_1 + 2\beta \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 + \gamma \cos^2 \alpha_1}$$

$$= (1 + m_1^2) \cdot \sin \alpha_1 \cdot \frac{1}{T(\alpha_1)}$$

en posant:  $m_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ , et  $T(\alpha_1) \equiv -\frac{1}{\delta} m_1^2 - \frac{2\beta}{\delta} m_1 - \frac{\gamma}{\delta}$ .  $T$  est positif, quel que soit  $m_1$ , et passe par un minimum  $k_1 = \frac{\beta^2 - \gamma}{\delta}$

Quelle que soit la position de  $O$  sur  $\mathcal{C}$ , on a:  $\beta^2 - \gamma = f < 0$ , et  $|\delta| = \overline{OG} < 2a = \text{grand axe de } \mathcal{C}$ , donc  $k_1 > \frac{-f}{2a} > 0$ .

1. Si  $\lambda \rightarrow 0$ , en parcourant une suite de valeurs décroissantes, on voit, d'après leurs équations, que les ellipses  $\mathcal{E}_\lambda$  correspondantes, dont chacune enveloppe la précédente, tendent d'une façon continue vers  $\mathcal{C}$ . Il s'ensuit que  $\alpha_1 \rightarrow 0$ . On voit que, en négligeant un infiniment petit du troisième ordre par rapport à  $\alpha_1$ , on peut écrire:

$$OP < \frac{\sin \alpha_1}{k_1} < \frac{2a \sin \alpha_1}{-f}$$

$PO$  tend donc vers 0 avec  $\lambda$ , et il en est de même de l'arc  $PO$ , puisque  $\frac{\widehat{PO}}{PO} \rightarrow 1$ . On peut évidemment établir ce résultat pour chacun des  $n$  arcs sous-tendus par  $\mathcal{L}$ , et, comme  $n$  est fini, l'arc  $POQ \dots S$  tend vers 0 avec  $\lambda$ . On peut donc dire, en particulier, que, si  $\omega$  est la longueur du périmètre de  $\mathcal{C}$ , on a:  $\widehat{POQ \dots S} < \omega$  lorsque  $\lambda$  est voisin de 0.

2. Si  $\lambda \rightarrow b^2$ , l'ellipse  $\mathcal{E}_\lambda$  tend vers le segment rectiligne  $FF'$ , et on peut dire qu'à la limite toute tangente à  $\mathcal{C}$  passera par  $F'$  ou  $F$ . Pour  $n = 3$ , la ligne polygonale  $\mathcal{L}_0$  qui passe par  $O$  est formée des trois segments  $P_0 O$ ,  $OQ_0$ ,  $Q_0 R_0$ , et la figure montre que l'arc qu'elle soustend  $s_0 = \widehat{P_0 O} + \widehat{OQ_0} + \widehat{Q_0 R_0}$  est supérieur à  $\omega$ . Ceci est vrai, a fortiori, pour  $n > 3$ .

En résumé, quel que soit l'entier  $n$  considéré, la longueur de l'arc  $s$  sous-tendu par la ligne polygonale  $POQ \dots S$  varie, d'une valeur inférieure à  $\omega$ , à une autre valeur supérieure à  $\omega$ , en croissant constamment, lorsque  $\lambda$  croît de 0 à  $b^2$ . L'équation  $s(\lambda) = \omega$ , admet donc une solution  $\lambda_n$  comprise entre 0 et  $b^2$ , et une seule. Parmi les ellipses homofocales  $\mathcal{E}_\lambda$ , il y en a donc une et une seule  $\mathcal{E}_{\lambda_n}$  qui admette un polygone circonscrit de  $n$  côtés inscrit dans  $\mathcal{C}$ . Le théorème est donc démontré. On désignera par  $\Gamma_n$  l'ellipse  $\mathcal{E}_{\lambda_n}$  qu'on vient de trouver.

THÉORÈME 4. — *Pour qu'un polygone convexe, inscrit dans une ellipse  $\mathcal{C}$  soit un polygone  $\sigma_n$ , il faut et il suffit qu'il soit circonscrit à une ellipse  $\Gamma_n$  qui a les mêmes foyers que  $\mathcal{C}$ .*

*Démonstration.* — 1. La condition est nécessaire. — En effet, soit  $L$  un polygone  $\sigma_n$  de  $\mathcal{C}$ . Considérons des sommets consécutifs  $P, O, Q, R$  de  $L$ . On sait qu'il existe une conique  $\Gamma_n$  et une seule qui a les foyers  $F$  et  $F'$  et qui est tangente au côté  $PO$ . Soit  $ON$  la normale à  $\mathcal{C}$  en  $O$ .  $\mathcal{C}$  étant une conique, on sait que  $ON$  bissecte l'angle  $FOF'$ . Il s'ensuit que  $ON$  bissecte aussi l'angle des tangentes à  $\Gamma_n$  issues de  $O$ , comme on le voit en remarquant que  $F$  et  $F'$  sont les foyers de  $\Gamma_n$ , et en appliquant un théorème connu. Or une de ces tangentes est  $OP$ . L'autre doit être  $OQ$  puisque,  $L$  étant un polygone  $\sigma_n$ ,  $ON$  bissecte l'angle  $POQ$ . On voit de même que, si  $\Gamma_n$  est tangente à  $OQ$ , elle touche  $QR \dots$  etc. ... Donc  $L$  est bien circonscrit à  $\Gamma_n$ .

2. La condition est suffisante. — En effet, soit  $L$  un polygone inscrit dans  $\mathcal{C}$  et circonscrit à une conique homofocale  $\Gamma_n$ . Si  $P, O$  et  $Q$  sont trois sommets consécutifs de  $L$ ,  $OP$  et  $OQ$  étant tangents à  $\Gamma_n$ , on sait que les angles  $POQ$  et  $FOF'$  ont une même bissectrice intérieure  $ON$ .  $O$  étant sur  $\mathcal{C}$ , la bissectrice intérieure de l'angle  $FOF'$  se confond avec la normale à  $\mathcal{C}$  en  $O$ . Comme elle bissecte l'angle  $POQ$ ,  $O$  est le point d'impact de l'arc  $POQ$ .  $L$  est donc un polygone  $\sigma_n$ . Le théorème 4 est ainsi démontré.

THÉORÈME 5. — Etant donnés un entier  $n > 2$ , et une ellipse quelconque  $\mathcal{C}$ , il existe une infinité de polygones  $\sigma_n$  de  $\mathcal{C}$ . Ces polygones sont tous circonscrits à une ellipse homofocale.

*Démonstration.* — On sait d'après le théorème 3 qu'on peut trouver à l'intérieur de  $\mathcal{C}$  une ellipse homofocale  $\Gamma_n$ , telle qu'il existe un polygone convexe de  $n$  côtés inscrit dans  $\mathcal{C}$  et circonscrit à  $\Gamma_n$ . D'après un théorème de Poncelet, il s'ensuit qu'il y a alors une infinité de polygones satisfaisant à ces deux conditions. <sup>1</sup>

D'après le théorème 4 ce sont tous des polygones  $\sigma_n$ . Il n'y en a pas d'autres, car si  $L$  est un polygone  $\sigma_n$  de  $\mathcal{C}$ , il doit être circonscrit à une ellipse homofocale, en vertu du théorème 4, et d'après le théorème 3 cette ellipse ne peut être que  $\Gamma_n$ . Le théorème 5 est donc démontré.

*Exemple.* — Proposons-nous de déterminer les polygones  $\sigma_4$  d'une ellipse  $\mathcal{C}$  qu'on supposera donnée par son équation:  $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$ , dans un système d'axes rectangulaires. Soit  $AA' = 2a$  le grand axe de  $\mathcal{C}$ , et  $B'B = 2b$  son petit axe.

Le losange  $A'B'AB$  est évidemment un des quadrilatères  $\sigma_4$  de  $\mathcal{C}$  puisqu'en chacun de ses sommets la normale à  $\mathcal{C}$  est la bissectrice intérieure de l'angle du losange. L'ellipse  $\Gamma_4$  est déterminée par ses foyers  $F'$  et  $F$  et par une de ses tangentes qui peut être l'un quelconque des côtés du losange. On peut facilement vérifier que:

$$\Sigma \equiv a^4 u^2 + b^4 v^2 - (a^2 + b^2) w^2 = 0$$

est l'équation tangentielle de  $\Gamma_4$ . En effet:

1.  $\Sigma = 0$ , si  $u = \pm b$ ;  $v = \pm a$ ;  $w = -ab$ . Ceci montre que la conique  $\Sigma$  est tangente aux quatre côtés du losange qui ont comme équations:  $\pm bx \pm ay - ab = 0$ .

2.  $\Sigma = 0$ , si  $u = \pm i$ ;  $v = 1$ ;  $w = \pm ic$ . Ceci montre que  $\Sigma$  est tangente aux droites isotropes issues de  $F$  et de  $F'$ , et qu'elle a par suite ces points comme foyers. Donc  $\Sigma = 0$  est bien l'équation tangentielle de  $\Gamma_4$ .

Soit  $MNOP$  un quadrilatère  $\sigma_4$  de  $\mathcal{C}$ . On sait que tous ses côtés sont tangents à  $\Gamma_4$ , et que ses sommets sont des points de  $\mathcal{C}$ . Soient  $V, W, Y$  et  $Z$  les pôles respectifs de  $PM, MN, NO$  et  $OP$

<sup>1</sup> Voir J. V. PONCELET, *Traité des propriétés projectives des figures*. Tome I-565-566. Gauthier-Villars (1865).

par rapport à  $\mathcal{C}$ . L'équation de la polaire de  $W(x_1, y_1)$  est:  $b^2 x_1 x + a^2 y_1 y - a^2 b^2 = 0$ . C'est aussi celle de la droite  $MN$  qui est tangente à  $\Gamma_4$ . Donc l'équation  $\Sigma = 0$  doit être vérifiée si:  $u = b^2 x_1$ ;  $v = a^2 y_1$ ;  $w = -a^2 b^2$ . On a donc:

$$a^4 b^4 x_1^2 + b^4 a^4 y_1^2 - (a^2 + b^2) a^4 b^4 = 0,$$

ou:

$$x_1^2 + y_1^2 - (a^2 + b^2) = 0.$$

Donc le lieu de  $W$  est le cercle orthoptique de  $\mathcal{C}$  que l'on désignera par  $\mathcal{K}$ . On sait par suite que les tangentes  $WV$  et  $WY$  menées de  $W$  à  $\mathcal{C}$  forment un angle droit. De même on voit que  $\mathcal{K}$  est le lieu de  $Y, Z$ , et  $V$ , et que le quadrilatère  $VWYZ$  est un rectangle. Il ressort aussi de ce qui précède que les courbes  $\mathcal{K}$  et  $\Gamma_4$  se correspondent dans une transformation par polaires réciproques, par rapport à  $\mathcal{C}$ .

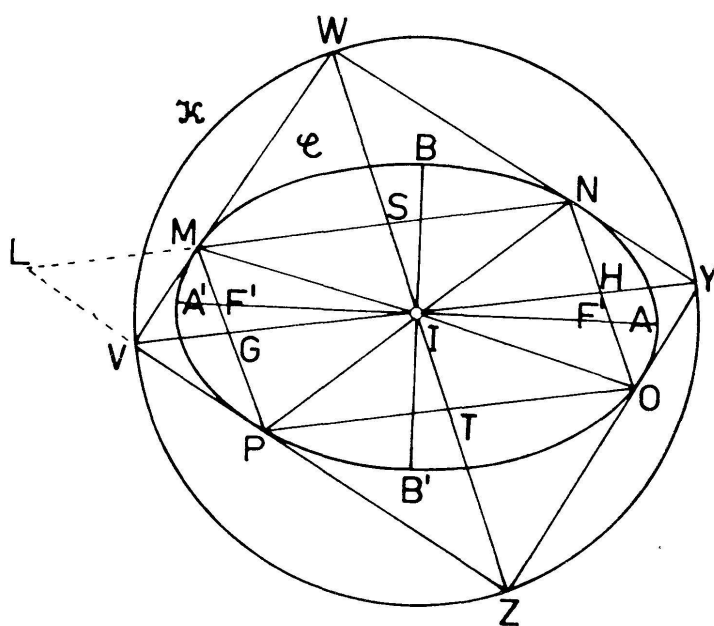


Fig. 3

On voit qu'il est aisé de construire un quadrilatère  $\sigma_4$  quelconque de  $\mathcal{C}$ , par exemple celui dont un des sommets est un point  $M$  choisi arbitrairement sur cette courbe. On mène, pour cela, la tangente en  $M$  à  $\mathcal{C}$ , puis la tangente qui lui est parallèle et qui touche  $\mathcal{C}$  au point  $O$ , symétrique de  $M$  par rapport à  $I$ . On construit ensuite les deux tangentes à  $\mathcal{C}$  qui sont perpendiculaires aux précédentes et qui les coupent aux points  $V, W, Y$  et  $Z$ . Ces

points sont situés sur  $\mathcal{K}$ , puisque de chacun d'eux, on voit  $\mathcal{C}$  sous un angle droit. Soient  $N$  et  $P$  les points de contact des deux dernières tangentes. La figure montre que  $MN$  est la polaire de  $W$  par rapport à  $\mathcal{C}$ .  $W$  étant sur  $\mathcal{K}$ ,  $MN$  est tangente à  $\Gamma_4$ , puisque  $\Gamma_4$  est la transformée de  $\mathcal{K}$  par polaires réciproques, par rapport à  $\mathcal{C}$ . De même on voit que  $NO$ ,  $OP$  et  $PM$  sont tangentes à  $\Gamma_4$ . D'après le théorème 4, le quadrilatère  $MNOP$  est donc un polygone  $\sigma_4$  de  $\mathcal{C}$ .

On peut aussi déduire de la figure que tous les quadrilatères  $\sigma_4$  de  $\mathcal{C}$  sont isopérimètres.

Pour le montrer, remarquons d'abord que  $MO$  et  $PN$  sont des diamètres de  $\mathcal{C}$  qui ont chacun comme milieu le centre  $I$  de cette conique. Le quadrilatère  $MNOP$  est donc un parallélogramme.

$V$  étant le pôle de  $MP$ , et  $Y$  le pôle de  $NO$ , la droite  $VY$  est la polaire du point d'intersection de  $MP$  et  $NO$ . Ce point étant à l'infini,  $VY$  passe par  $I$  et coupe les segments  $MP$  et  $NO$  en leurs milieux  $G$  et  $H$ . On en déduit:  $MN \parallel VY$ .

Si  $2p$  est le périmètre de  $MNOP$ , on a:  $p = MN + MP$ .

Soit  $L$  le point où le prolongement de  $NM$  coupe celui de  $ZV$ .  $MNOP$  étant un polygone  $\sigma_4$ , la tangente  $VM$  bissecte l'angle  $LMP$ , et l'on a:

$$LM = MP.$$

Donc:  $p = NM + MP = NM + LM = LN$ . D'autre part, on a:  $MN \parallel VY$ , donc  $LN \parallel VY$ , et  $LV \parallel NY$ .

On en tire:  $p = LN = VY = \text{diamètre de } \mathcal{K} = 2\sqrt{a^2 + b^2}$

Donc tous les quadrilatères  $MNOP$  ont le même périmètre  $2p = 4\sqrt{a^2 + b^2} = \text{constante}$ .

La proposition qu'on vient de démontrer sur les polygones  $\sigma_4$  n'est qu'un cas particulier du théorème suivant:

**THÉORÈME 6.** — *Si deux ellipses homofocales sont telles qu'il existe deux polygones convexes de  $n$  côtés inscrits dans l'une et circonscrits à l'autre, ces polygones sont isopérimètres.*

*Démonstration.* — Soient  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma$  les ellipses de l'énoncé,  $\Gamma$  étant intérieure à  $\mathcal{C}$ . On sait que, si, d'un point  $P$  de  $\mathcal{C}$ , on mène les deux tangentes  $PA$  et  $PB$  à  $\Gamma$ , la différence  $PA + PB - \text{arc}$





Supposons que  $\mathcal{P}$  ne soit pas un polygone  $\sigma_n$ .

On déduit alors de cette hypothèse qu'il y a au moins un des sommets de  $\mathcal{P}$  qui n'est pas un point d'impact. Soit  $V$  un pareil sommet. Si  $V'$  est l'impact de l'arc  $UVW$  de  $\mathcal{C}$ , on a, d'après le théorème I:

$$UV + VW < UV' + V'W.$$

En désignant par  $\mathcal{P}'$  le polygone obtenu en remplaçant, dans  $\mathcal{P}$ , le sommet  $V$  par  $V'$ , on tire de l'inégalité précédente:

$$\text{périmètre de } \mathcal{P} < \text{périmètre de } \mathcal{P}',$$

ce qui ne peut être puisque  $\mathcal{P}$  a un périmètre maximum. Donc l'hypothèse est fautive, et  $\mathcal{P}$  est un polygone  $\sigma_n$ . c.q.f.d.

On peut, d'autre part, établir la proposition suivante:

**THÉORÈME 8.** — *Tout polygone convexe de  $n$  côtés inscrit dans  $\mathcal{C}$  a un périmètre de longueur inférieure ou au plus égale à  $p_n$ .*

La démonstration que nous avons trouvée de cette proposition est longue et laborieuse, et il paraît préférable d'attendre qu'on ait eu l'idée d'une démonstration plus simple pour l'exposer.

L'existence des polygones  $\sigma_n$  ayant été bien établie, on voit qu'on peut déduire des propositions précédentes la conclusion suivante:

*Parmi tous les polygones convexes de  $n$  côtés inscrits dans une ellipse  $\mathcal{C}$  il y en a une infinité qui admettent un périmètre maximum. Ils sont isopérimètres, circonscrits à une ellipse homofocale, et ils admettent en chaque sommet la normale à  $\mathcal{C}$  comme bissectrice intérieure.*

Chemin de la Fontanettaz 8  
Pully-Rosiaz, Vaud.

(Reçu le 24 mai 1965)