

# 1. Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# FIBRÉS SUR LE BRANCHEMENT SIMPLE

par C. GODBILLON et G. REEB

## 1. INTRODUCTION

On sait l'intérêt que présentent les variétés topologiques non séparées à une dimension dans l'étude des feuilletages du plan. En effet, tout feuilletage  $\mathcal{F}$  du plan possède les propriétés suivantes :

- a) les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont fermées et homéomorphes à la droite réelle  $\mathbb{R}$  [1];
- b) l'espace des feuilles  $X$  de  $\mathcal{F}$  est une variété topologique à une dimension, en général non séparée, simplement connexe et à base dénombrable [1];
- c) la projection canonique du plan sur  $X$  est une fibration localement triviale [2].

La situation la plus simple (en dehors du cas bien connu où  $X$  est la droite réelle  $\mathbb{R}$ ) est celle où  $X$  est le branchement simple [1]. La non séparation de  $X$  met alors en défaut les deux résultats fondamentaux suivants [3]:

- un fibré localement trivial dont la base est contractile est trivial;
- un fibré localement trivial dont la fibre est contractile a une section.

Le but de cet article est d'aborder, sur le cas du branchement simple, une étude des fibrés localement triviaux de fibre  $\mathbb{R}$  dont la base est une variété à une dimension non séparée.

Après avoir obtenu des critères de séparation et de non séparation de l'espace total, on montre comment le type de ces fibrés peut varier à l'infini. Sans vouloir en expliciter une classification générale (d'un intérêt d'ailleurs limité), on donne cependant un théorème d'unicité des fibrés ayant un espace total séparé. Ces fibrés, qui sont tous isomorphes pour le groupe des homéomorphismes croissants de la droite, se répartissent en deux classes d'équivalence pour ce groupe; par contre, ils sont tous équivalents pour le groupe des homéomorphismes.

Interprété en termes de structures feuilletées du plan, ce théorème permet de donner une classification de ces feuilletages (orientés ou non)

ayant le branchement simple pour espaces des feuilles, résultat qui précise ici un théorème général de W. Kaplan [2].

Dans une dernière partie on restreint le groupe structural des fibrés au groupe des translations et au groupe des difféomorphismes de  $\mathfrak{R}$ . Dans ce cas-ci on obtient aussi un théorème de classification des fibrés différentiables séparés; par contre on ne peut plus en déduire une classification différentiable des feuilletages différentiables du plan.

## 2. LE BRANCHEMENT SIMPLE

Soient  $\mathfrak{R}_1$  et  $\mathfrak{R}_2$  deux exemplaires de la droite réelle paramétrés respectivement par  $x_1$  et  $x_2$ . Le branchement simple  $X$  est le quotient de la somme topologique  $\Sigma = \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$  par la relation d'équivalence qui identifie les points  $x_1$  et  $x_2$  pour  $x_1 = x_2 = x < 0$ . On note  $\pi$  la projection de  $\Sigma$  sur  $X$ .

L'espace  $X$  est une variété topologique de dimension 1 non séparée. En effet  $U_1 = \pi(\mathfrak{R}_1)$  et  $U_2 = \pi(\mathfrak{R}_2)$  sont des ouverts de  $X$ , et les restrictions de  $\pi$  à  $\mathfrak{R}_1$  et  $\mathfrak{R}_2$  définissent un atlas de  $X$ ; on identifiera l'intersection  $U = U_1 \cap U_2$  avec l'intervalle  $] -\infty, 0 [$  de  $\mathfrak{R}$ . Les points  $o_1 \in U_1$  et  $o_2 \in U_2$ , images par  $\pi$  des origines de  $\mathfrak{R}_1$  et  $\mathfrak{R}_2$ , sont les points de branchement de  $X$  (points non séparés).

L'involution de  $\Sigma$  qui échange les deux exemplaires  $\mathfrak{R}_1$  et  $\mathfrak{R}_2$  définit une involution continue  $h$  de  $X$  qui échange les deux ouverts  $U_1$  et  $U_2$  en laissant fixes les points de  $U$ .

Plus généralement, un homéomorphisme  $f$  de  $X$  laisse  $U_1$  et  $U_2$  invariants ou les permute; le premier cas est caractérisé par  $f(o_1) = o_1$  (ou  $f(o_2) = o_2$ ), le second par  $f(o_1) = o_2$  (ou  $f(o_2) = o_1$ ). Dans tous les cas on a  $f(U) = U$ .

On peut enfin remarquer que le branchement simple est un espace contractile, donc acyclique.

## 3. FIBRÉS SUR LE BRANCHEMENT SIMPLE

Soit  $\eta = (E, p, X)$  un fibré localement trivial de base  $X$  et de fibre  $\mathfrak{R}$ ; tous les fibrés intervenant dans la suite étant de ce type, on dira simplement que  $\eta$  est un fibré sur  $X$ .

On peut considérer  $\eta$  comme un fibré à groupe structural au sens de Steenrod [3]; le groupe de structure est ici le groupe  $G$  des homéomor-