

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 12 (1966)
Heft: 4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FIBRES SUR LE BRANCHEMENT SIMPLE
Autor: Godbillon, C. / Reeb, G.
Kapitel: 4. Critères de séparation
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-40748>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 03.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Si deux tels fibrés sont isomorphes dans G^+ , l'homéomorphisme correspondant du plan est compatible avec ces deux orientations; par contre un isomorphisme dans G , et non dans G^+ induit un homéomorphisme compatible avec les orientations des feuilletages, mais renversant l'orientation du plan.

4. CRITÈRES DE SÉPARATION

Soient $\eta = (E, p, X)$ un fibré sur X , Φ_1 et Φ_2 des trivialisations de η/U_1 et η/U_2 , et g le changement de carte associé.

Les ensembles $p^{-1}(U_1)$, $p^{-1}(U_2)$ et $p^{-1}(X - \{o_1, o_2\})$ sont des ouverts séparés de E . Par conséquent si $e_1 \in p^{-1}(U_1)$ et $e_2 \in p^{-1}(U_2)$ sont des points non séparés de E on a $e_1 = \Phi_1(0, y)$ et $e_2 = \Phi_2(0, z)$.

PROPOSITION 4.

|| Pour que E soit non séparé, il faut et il suffit qu'il existe
 || une suite (ξ_n) de nombres négatifs tendant vers 0,
 || une suite (y_n) ayant une limite finie y ,
 || telles que la suite $(g_{\xi_n}(y_n))$ ait une limite finie z .

Démonstration. — La condition est suffisante car la suite $\varepsilon_n = \Phi_1(\xi_n, y_n) = \Phi_2(\xi_n, g_{\xi_n}(y_n))$ converge simultanément vers les points $e_1 = \Phi_1(0, y)$ et $e_2 = \Phi_2(0, z)$.

Supposons réciproquement que $e_1 = \Phi_1(0, y)$ et $e_2 = \Phi_2(0, z)$ soient deux points non séparés de E . Soient $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$) un système fondamental de voisinages emboîtés de e_1 (resp. de e_2) contenus dans $p^{-1}(U_1)$ (resp. $p^{-1}(U_2)$). Pour tout n on peut trouver un point $\varepsilon_n = \Phi_1(\xi_n, y_n) = \Phi_2(\xi_n, g_{\xi_n}(y_n))$ dans $V_n \cap W_n$. La suite (ε_n) tend alors simultanément vers e_1 et vers e_2 ; les suites (ξ_n) , (y_n) et $(g(\xi_n) y_n)$ ont donc respectivement 0, y et z pour limites.

C.q.f.d.

COROLLAIRE.

|| Soit z un point d'accumulation de $g_x(y)$ pour y fixé et x tendant
 || vers 0. Alors les points $\Phi_1(0, y)$ et $\Phi_2(0, z)$ ne sont pas séparés
 || dans E .

Exemples. — Soient $(\eta_i)_{0 \leq i \leq 7}$ les fibrés associés aux changements de carte suivants:

$$0 - g_x(y) = y$$

$$1 - g_x(y) = y + \sin \frac{1}{x}$$

$$2 - g_x(y) = y + \left| \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right|$$

$$3 - g_x(y) = y + \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$$

$$4 - g_x(y) = -xy$$

$$5 - g_x(y) = \begin{cases} -xy & \text{si } |y| \leq 1 \\ -x + y - 1 & \text{si } y \geq 1 \\ x + y + 1 & \text{si } y \leq -1 \end{cases}$$

$$6 - g_x(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{x} & \text{si } y \leq 0 \\ y + \frac{1}{x} + \exp\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}\right) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

$$7 - g_x(y) = y + \frac{1}{x}$$

On déduit du corollaire précédent que les fibrés $(\eta_i)_{0 \leq i \leq 5}$ ne sont pas séparés, et de la proposition 4 que η_6 est aussi non séparé alors que η_7 est séparé.

On peut d'ailleurs remarquer, en considérant les ensembles d'accumulation de $g_x(y)$ pour y fixé et x tendant vers 0, que ces fibrés sont tous distincts (deux à deux non isomorphes).

Ces exemples montrent aussi comment on peut varier à l'infini le type des fibrés sur X .

PROPOSITION 5.

|| Pour que E soit séparé il faut et il suffit que pour tout y dans \mathfrak{R}
 || on ait $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = -\infty$ (ou $+\infty$).

Démonstration. — Si E est séparé, le corollaire de la proposition 4 montre que $g_x(y)$ n'a pas de point d'accumulation à distance finie pour y fixé et x tendant vers 0; on a donc $\lim |g_x(y)| = \infty$ pour tout y dans \mathfrak{R} .

Désignons par A (resp. B) l'ensemble des points y de \mathfrak{R} tels que $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = -\infty$ (resp. $= +\infty$) et supposons A et B non vides.

Si y_0 est dans A (resp. y_1 dans B) on a aussi y dans A (resp. dans B) pour $y \leq y_0$ (resp. $y \geq y_1$). Les ensembles A et B sont donc des intervalles disjoints recouvrant \mathfrak{R} . L'un des deux, par exemple A , est fermé; on note alors z le plus grand élément de A .

Soit (ζ_n) une suite de nombres négatifs tendant vers 0 telle que $g_{\zeta_n}(z) < 0$ pour tout n . On peut trouver une suite strictement décroissante (y_n) tendant vers z telle que $g_{\xi_n}(y_n) < 0$. Chacun des y_n étant dans B , il existe $\xi_n > \zeta_n$ tel que $g_{\xi_n}(y_n) = 0$. La proposition 4 montre alors que cette situation est impossible si E est séparé; on a donc $A = \phi$ ou $B = \phi$.

Supposons maintenant que pour tout y dans \mathfrak{R} on a $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = -\infty$. Soient (ξ_n) une suite de nombres négatifs tendant vers 0 et (y_n) une suite ayant une limite finie. Si z est un majorant de la suite (y_n) on a $g_{\xi_n}(y_n) \leq g_{\xi_n}(z)$ pour tout n ; et par suite $\lim_{n \rightarrow \infty} g_{\xi_n}(y_n) = -\infty$. L'espace E est donc séparé.

C.q.f.d.

COROLLAIRE.

|| Si $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = -\infty$ pour tout y dans \mathfrak{R} , $\lim_{x \rightarrow 0} g_x^{-1}(y) = +\infty$ pour tout $y \in \mathfrak{R}$.

5. CLASSIFICATION DES FIBRÉS SÉPARÉS

Soient $\eta = (E, p, X)$ et $\eta' = (E', p', X)$ deux fibrés sur X associés à des changements de carte g et g' , et tels que E et E' soient séparés.

PROPOSITION 6.

|| Soit F un isomorphisme de η sur η' pour le groupe G^+ induisant un homéomorphisme f de X ayant o_1 comme point fixe. On a alors $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = \lim_{x \rightarrow 0} g'_x(y)$ pour tout y dans \mathfrak{R} .

La démonstration est immédiate.

Plus précisément, on a d'ailleurs:

THÉORÈME.

|| Pour que les fibrés séparés η et η' soient équivalents dans le groupe G^+ , il faut et il suffit qu'on ait $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = \lim_{x \rightarrow 0} g'_x(y)$ pour tout y dans \mathfrak{R}

La condition nécessaire est une conséquence de la proposition 6. Supposons donc que $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = \lim_{x \rightarrow 0} g'_x(y) = -\infty$ pour tout y dans \mathfrak{R} (le cas