

## 4. Critères de séparation

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Si deux tels fibrés sont isomorphes dans  $G^+$ , l'homéomorphisme correspondant du plan est compatible avec ces deux orientations; par contre un isomorphisme dans  $G$ , et non dans  $G^+$  induit un homéomorphisme compatible avec les orientations des feuilletages, mais renversant l'orientation du plan.

#### 4. CRITÈRES DE SÉPARATION

Soient  $\eta = (E, p, X)$  un fibré sur  $X$ ,  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  des trivialisations de  $\eta/U_1$  et  $\eta/U_2$ , et  $g$  le changement de carte associé.

Les ensembles  $p^{-1}(U_1)$ ,  $p^{-1}(U_2)$  et  $p^{-1}(X - \{o_1, o_2\})$  sont des ouverts séparés de  $E$ . Par conséquent si  $e_1 \in p^{-1}(U_1)$  et  $e_2 \in p^{-1}(U_2)$  sont des points non séparés de  $E$  on a  $e_1 = \Phi_1(0, y)$  et  $e_2 = \Phi_2(0, z)$ .

PROPOSITION 4.

|| Pour que  $E$  soit non séparé, il faut et il suffit qu'il existe  
 || une suite  $(\xi_n)$  de nombres négatifs tendant vers 0,  
 || une suite  $(y_n)$  ayant une limite finie  $y$ ,  
 || telles que la suite  $(g_{\xi_n}(y_n))$  ait une limite finie  $z$ .

*Démonstration.* — La condition est suffisante car la suite  $\varepsilon_n = \Phi_1(\xi_n, y_n) = \Phi_2(\xi_n, g_{\xi_n}(y_n))$  converge simultanément vers les points  $e_1 = \Phi_1(0, y)$  et  $e_2 = \Phi_2(0, z)$ .

Supposons réciproquement que  $e_1 = \Phi_1(0, y)$  et  $e_2 = \Phi_2(0, z)$  soient deux points non séparés de  $E$ . Soient  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (resp.  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) un système fondamental de voisinages emboîtés de  $e_1$  (resp. de  $e_2$ ) contenus dans  $p^{-1}(U_1)$  (resp.  $p^{-1}(U_2)$ ). Pour tout  $n$  on peut trouver un point  $\varepsilon_n = \Phi_1(\xi_n, y_n) = \Phi_2(\xi_n, g_{\xi_n}(y_n))$  dans  $V_n \cap W_n$ . La suite  $(\varepsilon_n)$  tend alors simultanément vers  $e_1$  et vers  $e_2$ ; les suites  $(\xi_n)$ ,  $(y_n)$  et  $(g(\xi_n) y_n)$  ont donc respectivement 0,  $y$  et  $z$  pour limites.

C.q.f.d.

COROLLAIRE.

|| Soit  $z$  un point d'accumulation de  $g_x(y)$  pour  $y$  fixé et  $x$  tendant  
 || vers 0. Alors les points  $\Phi_1(0, y)$  et  $\Phi_2(0, z)$  ne sont pas séparés  
 || dans  $E$ .

*Exemples.* — Soient  $(\eta_i)_{0 \leq i \leq 7}$  les fibrés associés aux changements de carte suivants:

$$0 - g_x(y) = y$$

$$1 - g_x(y) = y + \sin \frac{1}{x}$$

$$2 - g_x(y) = y + \left| \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right|$$

$$3 - g_x(y) = y + \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$$

$$4 - g_x(y) = -xy$$

$$5 - g_x(y) = \begin{cases} -xy & \text{si } |y| \leq 1 \\ -x + y - 1 & \text{si } y \geq 1 \\ x + y + 1 & \text{si } y \leq -1 \end{cases}$$

$$6 - g_x(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{x} & \text{si } y \leq 0 \\ y + \frac{1}{x} + \exp\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}\right) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

$$7 - g_x(y) = y + \frac{1}{x}$$

On déduit du corollaire précédent que les fibrés  $(\eta_i)_{0 \leq i \leq 5}$  ne sont pas séparés, et de la proposition 4 que  $\eta_6$  est aussi non séparé alors que  $\eta_7$  est séparé.

On peut d'ailleurs remarquer, en considérant les ensembles d'accumulation de  $g_x(y)$  pour  $y$  fixé et  $x$  tendant vers 0, que ces fibrés sont tous distincts (deux à deux non isomorphes).

Ces exemples montrent aussi comment on peut varier à l'infini le type des fibrés sur  $X$ .

**PROPOSITION 5.**

|| Pour que  $E$  soit séparé il faut et il suffit que pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$   
 || on ait  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = -\infty$  (ou  $+\infty$ ).

*Démonstration.* — Si  $E$  est séparé, le corollaire de la proposition 4 montre que  $g_x(y)$  n'a pas de point d'accumulation à distance finie pour  $y$  fixé et  $x$  tendant vers 0; on a donc  $\lim |g_x(y)| = \infty$  pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$ .

Désignons par  $A$  (resp.  $B$ ) l'ensemble des points  $y$  de  $\mathfrak{R}$  tels que  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = -\infty$  (resp.  $= +\infty$ ) et supposons  $A$  et  $B$  non vides.

Si  $y_0$  est dans  $A$  (resp.  $y_1$  dans  $B$ ) on a aussi  $y$  dans  $A$  (resp. dans  $B$ ) pour  $y \leq y_0$  (resp.  $y \geq y_1$ ). Les ensembles  $A$  et  $B$  sont donc des intervalles disjoints recouvrant  $\mathfrak{R}$ . L'un des deux, par exemple  $A$ , est fermé; on note alors  $z$  le plus grand élément de  $A$ .

Soit  $(\zeta_n)$  une suite de nombres négatifs tendant vers 0 telle que  $g_{\zeta_n}(z) < 0$  pour tout  $n$ . On peut trouver une suite strictement décroissante  $(y_n)$  tendant vers  $z$  telle que  $g_{\xi_n}(y_n) < 0$ . Chacun des  $y_n$  étant dans  $B$ , il existe  $\xi_n > \zeta_n$  tel que  $g_{\xi_n}(y_n) = 0$ . La proposition 4 montre alors que cette situation est impossible si  $E$  est séparé; on a donc  $A = \phi$  ou  $B = \phi$ .

Supposons maintenant que pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$  on a  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = -\infty$ . Soient  $(\xi_n)$  une suite de nombres négatifs tendant vers 0 et  $(y_n)$  une suite ayant une limite finie. Si  $z$  est un majorant de la suite  $(y_n)$  on a  $g_{\xi_n}(y_n) \leq g_{\xi_n}(z)$  pour tout  $n$ ; et par suite  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_{\xi_n}(y_n) = -\infty$ . L'espace  $E$  est donc séparé.

C.q.f.d.

COROLLAIRE.

|| Si  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = -\infty$  pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x^{-1}(y) = +\infty$  pour tout  $y \in \mathfrak{R}$ .

## 5. CLASSIFICATION DES FIBRÉS SÉPARÉS

Soient  $\eta = (E, p, X)$  et  $\eta' = (E', p', X)$  deux fibrés sur  $X$  associés à des changements de carte  $g$  et  $g'$ , et tels que  $E$  et  $E'$  soient séparés.

PROPOSITION 6.

|| Soit  $F$  un isomorphisme de  $\eta$  sur  $\eta'$  pour le groupe  $G^+$  induisant un homéomorphisme  $f$  de  $X$  ayant  $o_1$  comme point fixe. On a alors  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = \lim_{x \rightarrow 0} g'_x(y)$  pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$ .

La démonstration est immédiate.

Plus précisément, on a d'ailleurs:

THÉORÈME.

|| Pour que les fibrés séparés  $\eta$  et  $\eta'$  soient équivalents dans le groupe  $G^+$ , il faut et il suffit qu'on ait  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = \lim_{x \rightarrow 0} g'_x(y)$  pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$

La condition nécessaire est une conséquence de la proposition 6. Supposons donc que  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = \lim_{x \rightarrow 0} g'_x(y) = -\infty$  pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$  (le cas