**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Band:** 12 (1966)
**Heft:** 4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** FIBRES SUR LE BRANCHEMENT SIMPLE
**Kapitel:** 5. Classification des fibres séparés
**Autor:** Godbillon, C. / Reeb, G.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-40748

Si $y_o$ est dans $A$ (resp. $y_1$ dans $B$) on a aussi $y$ dans $A$ (resp. dans $B$) pour $y \leqq y_0$ (resp. $y \geqq y_1$). Les ensembles $A$ et $B$ sont donc des intervalles disjoints recouvrant $\Re$. L'un des deux, par exemple $A$, est fermé; on note alors $z$ le plus grand élément de $A$.

Soit $(\zeta_n)$ une suite de nombres négatifs tendant vers 0 telle que $g_{\zeta_n}(z) < 0$ pour tout $n$. On peut trouver une suite strictement décroissante $(y_n)$ tendant vers $z$ telle que $g_{\xi_n}(y_n) < 0$. Chacun des $y_n$ étant dans $B$, il existe $\xi_n > \zeta_n$ tel que $g_{\xi_n}(y_n) = 0$. La proposition 4 montre alors que cette situation est impossible si $E$ est séparé; on a donc $A = \phi$ ou $B = \phi$.

Supposons maintenant que pour tout $y$ dans $\Re$ on a $\lim\limits_{x \to 0} g_x(y) = -\infty$. Soient $(\xi_n)$ une suite de nombres négatifs tendant vers 0 et $(y_n)$ une suite ayant une limite finie. Si $z$ est un majorant de la suite $(y_n)$ on a $g_{\xi_n}(y_n) \leqq g_{\xi_n}(z)$ pour tout $n$; et par suite $\lim\limits_{n \to \infty} g_{\xi_n}(y_n) = -\infty$. L'espace $E$ est donc séparé.

C.q.f.d.

COROLLAIRE.

Si $\lim g_x(y) = -\infty$ pour tout $y$ dans $\Re$, $\lim\limits_{x \to o} g_x^{-1}(y) = +\infty$ pour tout $y \in \Re$.

## 5. CLASSIFICATION DES FIBRÉS SÉPARÉS

Soient $\eta = (E, p. X)$ et $\eta' = (E', p', X)$ deux fibrés sur $X$ associés à des changements de carte $g$ et $g'$, et tels que $E$ et $E'$ soient séparés.

PROPOSITION 6.

Soit $F$ un isomorphisme de $\eta$ sur $\eta'$ pour le groupe $G^+$ induisant un homéomorphisme $f$ de $X$ ayant $o_1$ comme point fixe. On a alors $\lim\limits_{x \to 0} g_x(y) = \lim\limits_{x \to 0} g'_x(y)$ pour tout $y$ dans $\Re$.

La démonstration est immédiate.

Plus précisément, on a d'ailleurs:

THÉORÈME.

Pour que les fibrés séparés $\eta$ et $\eta'$ soient équivalents dans le groupe $G^+$, il faut et il suffit qu'on ait $\lim\limits_{x \to 0} g_x(y) = \lim\limits_{x \to 0} g'_x(y)$ pour tout $y$ dans $\Re$

La condition nécessaire est une conséquence de la proposition 6. Supposons donc que $\lim\limits_{x \to 0} g_x(y) = \lim\limits_{x \to 0} g'_x(y) = -\infty$ pour tout $y$ dans $\Re$ (le cas où cette limite est $+\infty$ se traiterait de façon analogue).

LEMME 1.

Il existe une application $f$ de $[-1, 0[$ dans $\mathfrak{R}$ ayant les propriétés suivantes:

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty \\
&b) \quad g_{-1}(f(-1)) = 0 \\
&c) \quad g_x(f(x)) < 0 \qquad \text{pour tout} \quad x > -1 \\
&d) \quad \lim_{x \to 0} g_x(f(x)) = -\infty .
\end{aligned}
$$

*Démonstration.* — Soit $(y_n)_{n \geqq 1}$ une suite strictement croissante de nombres positifs tendant vers l'infini. On peut construire une suite strictement croissante $(\xi_n)_{n \geqq 1}$ dans $]-1, 0[$ tendant vers 0 et telle que l'on ait pour tout $n$ $g_x(y_n) < -n$ pour $x \geqq \xi_n$.

On a alors

$$
\begin{aligned}
g_x(y_n) &< -n &&\text{pour} \quad x \in [\xi_n, \xi_{n+1}] \\
g_{\xi_{n+1}}(y) &< -(n+1) &&\text{pour} \quad y \in [y_n, y_{n+1}] .
\end{aligned}
$$

Il existe donc un homéomorphisme croissant $f_n$ de $[\xi_n, \xi_{n+1}]$ sur $[y_n, y_{n+1}]$ tel que $g_x(f_n(x)) < -n$ pour tout $x \in [\xi_n, \xi_{n+1}]$. Le recollement des $f_n$ détermine $f$ sur l'intervalle $[\xi_1, 0[$; on étend alors $f$ à $[-1, 0[$ de façon à satisfaire aux conditions *a)* et *b)*.

C.q.f.d.

On construit de même une application $f'$ de $[-1, 0[$ dans $\mathfrak{R}$ ayant les propriétés *a), b), c), d)* du lemme 1 avec $g'$ en place de $g$.

On désigne par $F$ (resp. $F'$) le fermé réunion de la droite $x = 0$ et de l'ensemble des points $(x, y)$ tels que $-1 \leqq x < 0$ et $|y| \leqq |g_x(f(x))|$ (resp. $|y| \leqq |g'(f'(x))|$.

LEMME 2.

Il existe un homéomorphisme de $F$ sur $F'$ de la forme $(x, y) \to (x, e_x(y))$ où pour tout $x$, $e_x$ est une application croissante, et $e_0 =$ identité.

*Démonstration.* — On définit $e_x(y)$ par

$$
\begin{aligned}
e_x(y) &= y &&\text{si} \ |y| \leqq \tfrac{1}{2} \inf(|g_x(f(x))|, \ |g'_x(f'(x)|) \\
e_x(g_x(f(x))) &= g'_x(f'(x))
\end{aligned}
$$

$$e_x(-g_x(f(x))) = -g'_x(f'(x))$$

$$e_x \text{ est affine pour } \quad y \geqq \tfrac{1}{2} \inf(|g_x(f(x))|, |g'_x(f'(x))|)$$

$$\text{et } y \leqq -\tfrac{1}{2} \inf(|g_x(f(x))|, |g'_x(f'(x))|)$$

C.q.f.d.

LEMME 3.

Il existe une application continue $\alpha$ de $\mathfrak{R}$ dans $G^+$ ayant les propriétés suivantes:

$$\alpha_x = \text{ identité pour } \quad x \leqq -1 \qquad \text{et } x \geqq 0$$

$$\alpha_x(y) = g_x^{-1} e_x^{-1} g'_x(y) \quad \text{si} \quad g'_x(y) \in F'.$$

On construit $\alpha$ par un procédé analogue à celui utilisé dans la démonstration du lemme 2.

*Démonstration du théorème.* — On définit une application continue $\beta$ de $\mathfrak{R}$ dans $G^+$ par

$$\begin{array}{lll} \beta_x = \text{ identité} & \text{si} & x \geqq 0 \\ \beta_x(y) = e_x(y) & \text{si} & (x, y) \in F \\ \beta_x(y) = g'_x \alpha_x^{-1} g_x^{-1}(y) & \text{si} & x < 0 \text{ et } (x, y) \notin F. \end{array}$$

On a alors $\beta_x g_x \alpha_x = g'_x$ pour tout $x < 0$.

C.q.f.d.

COROLLAIRE 1.

Pour le groupe $G^+$ il existe deux classes d'équivalence de fibrés séparés sur $X$.

En effet, si $\eta$ est défini par un changement de carte $g$ tel que $\lim\limits_{x \to 0} = g_x(y) = -\infty$ pour tout $y$ dans $\mathfrak{R}$ il est équivalent dans $G^+$ au fibré $\eta_1$ associé au changement de carte $g'_x(y) = y + \dfrac{1}{x}$.

Si, par contre, $\lim\limits_{x \to 0} g_x(y) = +\infty$ pour tout $y$ dans $\mathfrak{R}$, $\eta$ est équivalent dans $G^+$ au fibré $\eta_2$ associé au changement de carte $g''_x(y) = y - \dfrac{1}{x}$.

Enfin on a remarqué après la proposition 2 que les fibrés $\eta_1$ et $\eta_2$ ne sont pas équivalents dans $G$.

Mais $\eta_1$ et $\eta_2$ sont isomorphes dans $G^+$ et équivalents dans $G$; on a donc:

COROLLAIRE 2.

Tous les fibrés séparés sur $X$ sont isomorphes pour le groupe $G^+$.

COROLLAIRE 3.

Tous les fibrés séparés sur $X$ sont équivalents pour le groupe $G$.

On peut traduire ces corollaires dans la théorie des feuilletages du plan. Rappelons pour cela que deux structures feuilletées $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ du plan sont équivalentes pour un groupe $\Gamma$ d'homéomorphismes du plan s'il existe un homéomorphisme $f$ dans $\Gamma$ qui transforme chaque feuille de $\mathscr{F}$ en une feuille de $\mathscr{F}'$; si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont orientées $f$ doit de plus être compatible avec les orientations de ces feuilles. On a alors (comparer à [2]):

COROLLAIRE 4.

Tous les feuilletages (non orientés) du plan dont l'espace des feuilles est le branchement simple sont équivalents pour le groupe des homéomorphismes conservant l'orientation.

COROLLAIRE 5.

Pour le groupe des homéomorphismes conservant l'orientation, les feuilletages orientés du plan dont l'espace des feuilles est le branchement simple se répartissent en deux classes d'équivalence.

COROLLAIRE 6.

Tous les feuilletages orientés du plan dont l'espace des feuilles est le branchement simple sont équivalents pour le groupe des homéomorphismes.

## 6. SPÉCIALISATION DU GROUPE DE STRUCTURE

Les résultats précédents montrent que chaque fibré séparé sur $X$ est équivalent dans $G^+$ à un fibré pour lequel le changement de carte prend ses valeurs dans le groupe $T$ des translations de $\mathfrak{R}$. On peut donc se proposer d'étudier les fibrés localement triviaux de base $X$, de fibre $\mathfrak{R}$ et de groupe $T$; un changement de carte s'identifie alors à une application continue de $]-\infty, 0[$ dans $\mathfrak{R}$. Si $\alpha$ et $\beta$ sont deux telles applications, les fibrés associés sont isomorphes dans $T$ si et seulement si il existe un homéomorphisme $f$ de