

# I. Théorèmes importants

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## I. THÉORÈMES IMPORTANTS

Si les propositions de ce chapitre ont de nombreuses applications, cela vient sans doute de leur généralité; on peut en effet les étendre à l'espace à  $n$  dimensions.

Rappelons d'abord quelques propriétés, qui, pour être banales, n'en sont pas moins importantes:

— L'intersection de plusieurs ovales est un ovale. Théorème analogue pour les ovoïdes. Toute section plane d'un ovoïde est un ovale. L'ombre au soleil d'un ovale ou d'un ovoïde est un ovale.

Encore intuitif, mais plus difficile à démontrer:

— Le périmètre d'un ovale est plus court que toute courbe fermée qui l'entoure; de même la surface d'un ovoïde est inférieure à toute surface fermée qui le contient.

— Tout ovoïde est rigide, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de déformation continue, conservant les longueurs des courbes tracées sur sa surface.

Et voici deux propositions capitales, aussi générales que simples, les théorèmes de Brunn et de Helly.

*Théorème de Brunn*: Dans le cas le plus complet, la variation des cordes parallèles d'un ovale ne présente que trois phases successives: croissance, constance, décroissance; une ou deux de ces phases peuvent d'ailleurs manquer (pensons par exemple aux cordes d'un triangle parallèles à un côté.) « Un ovale normal (c'est-à-dire dont le contour ne comporte pas de segment de droite) présente toujours juste deux phases: croissance et décroissance. » De même les aires des sections planes parallèles d'un ovoïde ne présentent, dans le cas le plus complet, que les trois phases de variation précédentes. « Si l'ovoïde est normal (c'est-à-dire si sa surface ne comporte ni facette plane, ni portion cylindrique), la variation se réduit juste à croissance puis décroissance. » Il est remarquable que, « si l'on remplace les aires des sections planes par leurs périmètres, la proposition de Brunn subsiste ». (On l'appelle parfois le théorème de la pomme de terre.)

*Le théorème de Helly* date de 1921, mais on n'en a vu tout l'intérêt — aussi en analyse — que récemment: Si des ovales ont trois à trois un point commun, ils ont tous un point commun; il en est de même d'ovoïdes qui ont quatre à quatre un point commun. On en a déduit, par exemple, que si un ovale peut couvrir tout triplet d'un ensemble fini d'ovales, il peut les couvrir tous; en particulier si un cercle est un couvercle pour tout triplet d'un ensemble fini de points d'un plan, il est un couvercle pour tous.

Voyons maintenant quelques *opérations qui « transforment » un ovale en ovale, un ovoïde en ovoïde*. Soulignons d'avance qu'il ne s'agit pas de transformations ponctuelles:

*La symétrisation.*

- 1) D'un ovale par rapport à une droite  $\Delta$  de son plan: on remplace toute corde perpendiculaire à cette droite par un segment de même support et de même longueur, centré sur elle. Cette symétrisation conserve l'aire de l'ovale et ne peut augmenter son périmètre.
- 2) D'un ovoïde par rapport à un plan  $P$ : dans la définition précédente on substitue  $P$  à  $\Delta$ .
- 3) D'un ovoïde par rapport à une droite: on remplace toute section plane perpendiculaire à cette droite par un cercle de même plan et de même aire, centré sur elle.

Les symétrisations 2) et 3) ne peuvent augmenter la surface de l'ovoïde et conservent son volume (principe de Cavalieri).

*Le tassement.*

Tasser un ovale sur une droite  $\Delta$ , c'est remplacer toute corde perpendiculaire par un segment  $AB$  de même support et de même longueur, de manière que tous les  $A$  soient sur  $\Delta$  et tous les  $B$  du même côté de cette droite. Définition analogue pour le tassement d'un ovoïde sur un plan. Remarquons que le tassement d'un ovale étant un ovale, il en résulte le théorème de Brunn avec une précision supplémentaire:

Soit  $C(X)$  la longueur d'une corde d'un ovale perpendiculaire à un axe  $OX$ , en fonction de son abscisse. Non seulement la

variation de  $C(X)$  est au plus triphasée, mais encore  $C(X)$  est une fonction convexe.

*La combinaison linéaire  $\Sigma a_i O_i$  de plusieurs ovales ou ovoïdes est respectivement un ovale ou un ovoïde.*

Précisons le sens de cette combinaison linéaire. Soit  $P$  un point fixe. Alors  $a_i O_i$  correspond à  $O_i$  dans l'homothétie  $(P, a_i)$ . Quant à  $O' + O''$ , c'est l'ovale (ou l'ovoïde) constitué par l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PM'} + \overrightarrow{PM''}$ , où  $M'$  et  $M''$  sont respectivement des points arbitraires de  $O'$  et de  $O''$ . (Si on change le point fixe  $P$ , le corps convexe  $\Sigma a_i O_i$  subit simplement une translation). (2)

L'ovale  $\frac{O + (-O)}{2}$  a des propriétés remarquables: il a un centre de symétrie; il a mêmes diamètre, largeur et périmètre que  $O$ ; son aire ne peut être inférieure à celle de  $O$ . De même l'ovoïde  $\frac{O + (-O)}{2}$  a un centre de symétrie, conserve le diamètre, la largeur et la surface de  $O$ , et son volume ne peut être inférieur à celui de  $O$ .

## II. QUELQUES RECHERCHES PERSONNELLES RÉCENTES

Le trait commun aux théorèmes groupés dans ce chapitre est qu'ils me sont particulièrement familiers, soit parce que j'en ai donné une nouvelle démonstration, soit même parce que je les ai trouvés.

*Le théorème des quatre sommets.* — « Tout ovale, dont la courbure du contour est définie en chaque point, a au moins quatre sommets », c'est-à-dire que sa courbure passe par quatre extrema au moins. Cette proposition, aujourd'hui bien classique, a été trouvée en 1908 par l'Indien Mukhopadyaya. J'en ai donné une démonstration purement géométrique, dans un article intitulé « spirales et ovales ». (3)

*Le théorème des deux tiers.* — Appelons noyau d'un ovale son intersection avec le symétrique par rapport à son centre de