

# Quelques démonstrations typiques

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Le plus petit disque qui peut couvrir tout ovale de diamètre  $D$  a pour rayon  $R = \frac{D}{\sqrt{3}}$ .

Tout ovale a-t-il un cercle circonscrit minimum et un cercle inscrit maximum uniques? — Oui pour le premier, non pour le second. (Pour le deuxième pensons à un rectangle.)

Soit un arc de courbe de longueur donnée, s'appuyant en ses extrémités sur les deux côtés d'un angle fixe. Steiner a démontré que l'aire limitée par l'angle et l'arc est maximum, si l'arc est circulaire et centré au sommet de l'angle.

Inutile de dire que de nombreux problèmes sur les ovales et les ovoïdes sont encore ouverts, telle la question de Henri Lebesgue: quel est l'ovale, d'aire minimum, pouvant couvrir tous les ovales de même diamètre donné ?

#### QUELQUES DÉMONSTRATIONS TYPIQUES

S'il n'y a pas de principe général pour aborder les problèmes des corps convexes, il y a cependant quelques méthodes de démonstration auxquelles on recourt fréquemment.

##### *Le polygone convexe.*

Si une propriété est démontrée pour tout polygone convexe, elle est vraie pour l'ovale, que l'on peut considérer comme un tel polygone de côtés infiniment petits. Le cas extrême est alors souvent le triangle. C'est de cette manière qu'on peut, par exemple, démontrer le théorème des quatre cinquièmes. On peut aussi comparer un ovale à un polygone. Ainsi pour démontrer le théorème des points entiers, on remplace l'ovale par le polygone qui est l'enveloppe convexe de ses points entiers intérieurs ou périphériques. (La démonstration complète dans <sup>(12)</sup> prend moins d'une page.)

##### *La fonction continue.*

Soit, par exemple, à démontrer que tout ovale admet au moins un carré circonscrit, c'est-à-dire formé par des droites supports. Prenons dans le plan orienté de l'ovale un axe fixe  $\vec{A}$ . A une

direction  $\vec{S}$  caractérisée par l'angle  $(\vec{A}, \vec{S}) = X$ , correspond un rectangle circonscrit, dont les côtés parallèles et perpendiculaires à  $\vec{S}$  ont pour longueurs respectivement  $a_0$  et  $b_0$ . Quand  $\vec{S}$  aura tourné de  $\frac{\pi}{2}$ , le rapport  $\frac{a}{b}$ , fonction continue de  $X$ , aura passé de  $\frac{a_0}{b_0}$  à  $\frac{b_0}{a_0}$ . Il aura donc pris au moins une fois la valeur 1. <sup>(13)</sup>

On peut démontrer de façon analogue, que tout ovale admet un carré inscrit; que tout point intérieur d'un ovale est le milieu d'une corde; qu'il existe une droite qui bissecte à la fois les aires de deux ovales donnés, ou un plan qui bissecte les volumes de trois ovoïdes donnés.

### *La récurrence.*

Démontrons par exemple le théorème de Helly pour les ovales. Montrons d'abord qu'il est vrai pour quatre ovales  $O_1, O_2, O_3, O_4$ . Désignons par  $(ijK)$  le point commun à  $O_i, O_j, O_K$ , et écartons le cas banal où trois de ces points seraient alignés. Alors ou bien trois des points — soit pour fixer les idées,  $(123), (134), (142)$  — déterminent un triangle, qui renferme le quatrième  $(234)$ , ou bien les quatre points forment un quadrilatère convexe, soit par exemple  $(123) (234) (341) (413)$ . On voit alors aisément que les quatre ovales ont en commun le point  $(234)$  dans le premier cas, le point d'intersection des diagonales dans le second. Supposons maintenant le théorème de Helly vrai pour  $n$  ovales, et considérons  $n + 1$  ovales  $O_1, O_2 \dots O_n, O_{n+1}$  ayant trois à trois un point commun. Désignons  $O_n \cap O_{n+1}$  par  $O$ . Les quatre corps  $O_i, O_j, O_n, O_{n+1}$ , ayant trois à trois un point commun, ont tous un point commun, qui est aussi commun au triplet  $O_i, O_j, O$ . Les  $n$  ovales  $O_1, O_2, \dots, O_{n-1}, O'$  ont donc trois à trois un point commun, et par suite ont tous un point commun, qui appartient aussi à  $O_n$  et à  $O_{n+1}$ .

Evidemment certaines démonstrations nécessitent des outils plus compliqués. Ainsi pour établir le théorème de Brunn sur les ovoïdes, on se sert de l'importante inégalité de Brunn-Minkowski: « Soient  $P', P, P''$  trois plans sécants parallèles d'un ovoïde, se suivant dans cet ordre. Désignons par  $S', S, S''$  les

aires des trois sections par  $h'$  et  $h''$  les distances de  $P'$  et de  $P''$  à  $P$ , et posons  $h' + h'' = h$ . Alors

$$h \sqrt{S} \geq h'' \sqrt{S'} + h' \sqrt{S''};$$

l'égalité n'est atteinte que si la portion de l'ovoïde comprise entre  $P'$  et  $P''$  est un tronc de cône. "

#### UNE CLASSIFICATION DES OVALES <sup>(14)</sup>

Considérons un ovale dont le contour a une courbure définie en chaque point <sup>(15)</sup> et ne comporte pas d'arc de cercle. On sait que ses sommets sont en nombre pair, les points de courbure maximum et minimum alternant. On peut alors classer l'ovale d'après le nombre de ses côtés, en appelant *côté* tout arc qui joint deux sommets à courbure maximum consécutifs. La forme de l'*ovale trilatère* (trois côtés) ou *quadrilatère*, par exemple, se rapproche de celle du triangle ou du quadrilatère. Le cercle étant écarté, le plus simple des ovales est *bilatère* (théorème des quatre sommets); l'ellipse en est un cas particulier.

#### *Remarque.*

Un ovale a une tangente en tout point, sauf éventuellement en un nombre fini de points anguleux. Même s'il ne présente pas de tels points, il peut avoir autant de points à courbure non définie que l'on veut. Pour le voir il suffit de penser à un ovale formé par  $4n$  arcs, raccordés tangentiuellement, qui sont prélevés alternativement sur deux cercles de rayons différents et ont tous

pour mesure en radians  $\frac{\pi}{2n}$ .

#### *Notion de spirale.*

J'appelle ainsi tout *arc de courbe, dont la variation de la courbure est monotone*. Chaque côté d'un ovale se compose donc de deux spirales. Dans <sup>(3)</sup> j'ai établi un certain nombre de propriétés de la spirale, telles que: elle ne peut se recouper; en chacun de ses points le cercle de courbure la traverse; elle est située entièrement