2. Ein Hilfssatz

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

2. Ein Hilfssatz

Ein wesentliche Rolle wird die folgende Aussage spielen:

Hilfssatz 1. *Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann eine Lösung von (2), wenn für jedes $x_0 \varepsilon (0,1)$ gilt:*

1. *Für jede Folge (x_n) aus $(0, x_0)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ist*

$$\liminf f(x_n) \geqq f(x_0).$$

2. *Für jedes $a \varepsilon [f(x_0), +\infty]$ gibt es eine Folge (y_n) aus $(0, x_0)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = a$.*

Beweis. a) Wenn $f(x)$ eine Lösung von (2) ist, folgen die beiden Aussagen unseres Hilfssatzes unmittelbar aus der Bedeutung von $L_f(x_0)$ in (1).

b) Jetzt sei $f(x)$ eine Funktion, die die Eigenschaften 1. und 2. besitzt. x_0 sei ein beliebiger Punkt aus $(0,1)$. Wir zeigen, dass $L_f(x_0) = [f(x_0), +\infty]$ ist. Wegen 1. gilt

$$\bigcup_{\substack{(x_n) \subset (0,x_0) \\ (x_n)' = \{x_0\}}} (f(x_n))' \subseteq [f(x_0), +\infty],$$

und wegen 2. auch

$$\bigcup_{\substack{(x_n) \subset (0,x_0) \\ (x_n)' = \{x_0\}}} (f(x_n))' \supseteq [f(x_0), +\infty].$$

Daraus folgt unsere Behauptung.

3. Eine Darstellung reeller Zahlen aus (0,1) durch gewisse Folgen

Um eine nichttriviale Lösung von (2) zu konstruieren, benötigen wir eine spezielle Darstellung der reellen Zahlen aus (0,1), die von den üblichen Darstellungen abweicht. Bekanntlich kann man die Zahlen aus (0,1) eineindeutig durch nicht-abbrechende Dualbrüche darstellen. Wenn also r eine beliebige reelle Zahl aus (0,1) ist, gilt