

# 3. Eine Darstellung reeller Zahlen aus $(0,1)$ durch gewisse Folgen

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 2. EIN HILFSSATZ

Ein wesentliche Rolle wird die folgende Aussage spielen:

HILFSSATZ 1. *Eine Funktion  $f(x)$  ist genau dann eine Lösung von (2), wenn für jedes  $x_0 \in (0,1)$  gilt:*

1. *Für jede Folge  $(x_n)$  aus  $(0, x_0)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  ist*  

$$\liminf f(x_n) \geq f(x_0).$$

2. *Für jedes  $a \in [f(x_0), +\infty]$  gibt es eine Folge  $(y_n)$  aus  $(0, x_0)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = a$ .*

*Beweis. a)* Wenn  $f(x)$  eine Lösung von (2) ist, folgen die beiden Aussagen unseres Hilfssatzes unmittelbar aus der Bedeutung von  $L_f(x_0)$  in (1).

*b)* Jetzt sei  $f(x)$  eine Funktion, die die Eigenschaften 1. und 2. besitzt.  $x_0$  sei ein beliebiger Punkt aus  $(0,1)$ . Wir zeigen, dass  $L_f(x_0) = [f(x_0), +\infty]$  ist. Wegen 1. gilt

$$\bigcup_{\substack{(x_n) \subset (0, x_0) \\ (x_n)' = \{x_0\}}} (f(x_n))' \subseteq [f(x_0), +\infty],$$

und wegen 2. auch

$$\bigcup_{\substack{(x_n) \subset (0, x_0) \\ (x_n)' = \{x_0\}}} (f(x_n))' \supseteq [f(x_0), +\infty].$$

Daraus folgt unsere Behauptung.

## 3. EINE DARSTELLUNG REELLER ZAHLEN AUS $(0,1)$ DURCH GEWISSE FOLGEN

Um eine nichttriviale Lösung von (2) zu konstruieren, benötigen wir eine spezielle Darstellung der reellen Zahlen aus  $(0,1)$ , die von den üblichen Darstellungen abweicht. Bekanntlich kann man die Zahlen aus  $(0,1)$  eineindeutig durch nicht-abbrechende Dualbrüche darstellen. Wenn also  $r$  eine beliebige reelle Zahl aus  $(0,1)$  ist, gilt

$$r = 0, \delta_1 \delta_2 \delta_3 \dots \delta_i \dots \quad \delta_i = 0 \text{ oder } 1$$

mit den folgenden zwei Eigenschaften:

( $E_1$ ) Es gibt einen Index  $m$ ,  $m \geq 1$ , für den  $\delta_m = 0$  ist.

( $E_2$ ) In der Folge der Zahlen  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \dots$  kommt die Zahl 1 unendlich oft vor.

Die Aussage ( $E_1$ ) trifft zu, weil  $r \neq 1$  ist. ( $E_2$ ) ist erfüllt, weil wir abbrechende Dualbrüche ausgeschlossen haben.

Jeder solchen Dualbruchentwicklung und damit jeder reellen Zahl aus  $(0,1)$  können wir in eindeutiger Weise eine Folge nichtnegativer ganzer Zahlen, in der mindestens ein positives Element vorkommt, auf die folgende Art zuordnen:

( $Z$ ) Wenn  $r \in (0,1)$  ist und die Dualbruchentwicklung

$$r = 0, \delta_1 \delta_2 \dots \delta_i \dots = 0, \underbrace{0 \dots 0}_{d_1} \underbrace{10 \dots 10}_{d_2} \underbrace{010 \dots 010}_{d_3} \dots$$

Nullen Nullen Nullen

mit den Eigenschaften ( $E_1$ ) und ( $E_2$ ) besitzt, dann wird der Zahl  $r$  die Folge  $(d_m)$  zugeordnet. Diese Folge nennen wir im weiteren die *zugeordnete Folge*, kurz: die  $Z$ -Folge, von  $r$ .

$D$  sei die Menge aller Folgen  $(d_m)$  mit den Eigenschaften:

( $Z_1$ ) Für alle  $m$  ist  $d_m$  eine nichtnegative ganze Zahl.

( $Z_2$ ) Es gibt einen Index  $q$ , für den  $d_q > 0$  ist.

Dann stellt die Zuordnungsvorschrift ( $Z$ ) eine eindeutige Abbildung von  $(0,1)$  auf  $D$  dar.

Wir können daher mit der gleichen Berechtigung, mit der wir eine reelle Zahl  $r$  aus  $(0,1)$  durch einen Dualbruch darstellen, jetzt eine reelle Zahl durch die ihr nach ( $Z$ ) zugeordnete  $Z$ -Folge aus  $D$  darstellen.

Die Dezimaldarstellung einer reellen Zahl  $r$ , die einer  $Z$ -Folge  $(d_m)$  aus  $D$  zugeordnet ist, kann man mittels der Formel

$$r = \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{2^M} - \left\{ M + \sum_{m=1}^M d_m \right\} \quad (3)$$

angeben.