4. SÄTZE ÜBER DAS RECHNEN MIT Z-FOLGEN

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

4. Sätze über das Rechnen mit Z-Folgen

Die eineindeutige Zuordnung der reellen Zahlen aus (0,1) zu den Z-Folgen aus D schreiben wir abgekürzt in der Form

$$x \leftrightarrow (d_m) \qquad x \in (0,1),\ (d_m) \in D\,.$$

Damit ist gemeint, dass (d_m) die der Zahl x gemäss (Z) zugeordnete Z-Folge ist. Daraus kann man sofort folgende Aussage ableiten:

(A) Wenn $x_1 \leftrightarrow (d_{1,m})$ und $x_2 \leftrightarrow (d_{2,m})$ ist, so ist $x_1 = x_2$ gleichbedeutend mit $d_{1,m} = d_{2,m}$ für alle $m = 1, 2, 3, \ldots$

Das gibt jetzt Anlass zu der

Definition 1. Die natürliche Zahl $i = i\,(x_1, x_2)$ heisst der Index zweier verschiedener reeller Zahlen x_1 und x_2 aus (0,1), wenn folgendes gilt:

$$1.\quad x_1 \leftrightarrow (d_{1,m}) \text{ und } x_2 \leftrightarrow (d_{2,m})$$

$$2.\quad d_{1,i} \neq d_{2,i}$$

3. Wenn $i > 1$ ist, so sei auch $d_{1,k} = d_{2,k}$ für alle $k = 1, 2, \ldots, i-1$.

Mit dieser Bezeichnung gilt jetzt

(B) Es sei

$$x_1 \neq x_2, x_1 \leftrightarrow (d_{1,m}), x_2 \leftrightarrow (d_{2,m}) \text{ und } i = i\,(x_1, x_2)\,.$$

Dann ist $x_1 > x_2$ gleichbedeutend mit $d_{1,i} < d_{2,i}$.

Hilfssatz 2. *a) Es sei $x \leftrightarrow (d_m)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k\,(\varepsilon)$ derart, dass für alle $y \in (0,1)$ aus der Beziehung $i\,(x, y) > k$ die Beziehung $|x - y| < \varepsilon$ folgt.*

b) Es sei

$$x_n \leftrightarrow (d_{n,m}),\ x \leftrightarrow (d_m),\ x_n \neq x \text{ und } i_n = i\,(x_n, x)$$

für $n = 1, 2, \ldots$ Dann folgt aus $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = \infty$ die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x\,.$$

Beweis. Da *b)* unmittelbar aus *a)* folgt, genügt es, *a)* zu beweisen. $\varepsilon > 0$ sei beliebig und fest. Wir wählen jetzt eine natürliche Zahl k so, dass $\varepsilon > 2^{1-k}$ ist, und betrachten nur solche y aus $(0,1)$, für die $i(x, y) \geqq k + 1$ ist. Ein solches y greifen wir heraus. Die zugeordnete *Z-Folge* sei (d_m^*), und der Index sei i^*. Dann kann man die Differenz $|x - y|$ vermöge (3) abschätzen:

$$
\begin{aligned}
|x - y| = {} & |2^{-(d_1+\ldots+d_{k+1}+k+1)} + 2^{-(d_1+\ldots+d_{k+2}+k+2)} + \ldots \\
& - 2^{-(d_1^*+\ldots+d_{k+1}^*+k+1)} - 2^{-(d_{k+1}^*+\ldots+d_{k+2}^*+k+2)} - \ldots| \\
& \leqq 2^{-(d_1+\ldots+d_k+k+1)}\left[2^{-d_{k+1}} + 2^{-(d_{k+1}+d_{k+2}+1)} + \ldots \right. \\
& \left. + 2^{-d_{k+1}^*} + 2^{-(d_{k+1}^*+d_{k+2}^*+1)} + \ldots\right] \\
\leqq {} & 2^{-(d_1+\ldots+d_k+k+1)}\left[1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots\right] \\
& \leqq 2^{-(d_1+\ldots+d_k)}\, 2^{-k+1} < \varepsilon\,.
\end{aligned}
$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass die Aussage *b)* in Hilfssatz 2 nicht umkehrbar ist. Das zeigt das Beispiel

$$
\begin{aligned}
x_n &= 2^{-1} + 2^{-5} + 2^{-5-n} \leftrightarrow (d_{n,m}) = (0, 3, n, 0, 0, \ldots 0, \ldots) \\
x &= 2^{-1} + 2^{-5} \leftrightarrow (d_m) = (0, 4, 0, 0, \ldots 0, \ldots)\,.
\end{aligned}
$$

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = 2$.

Im weiteren benötigen wir oft den

Hilfssatz 3. *(q_l) sei eine Folge natürlicher Zahlen. Dann ist die Negation der Aussage $\lim\limits_{l\to\infty} q_l = \infty$ gleichwertig mit der Aussage, dass in der Folge (q_l) eine feste natürliche Zahl k unendlich oft vorkommt.*

Weiter brauchen wir den

Hilfssatz 4. *Es sei $x_n \leftrightarrow (d_{n,m})$, $x \leftrightarrow (d_m)$, $x_n < x$ und $i_n = i(x_n, x)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ gleichwertig mit $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = \infty$.*

Beweis. Wegen Hilfssatz 2, *b)* haben wir nur zu beweisen, dass unter der angegebenen Voraussetzung aus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ die Behauptung $\lim_{n\to\infty} i_n = \infty$ folgt. Wir führen den Beweis indirekt. Aus der Annahme, dass $\lim_{n\to\infty} i_n = \infty$ nicht gilt, folgt mit Hilfssatz 3, dass es eine natürliche Zahl k gibt, die in der Folge der (i_n) unendlich oft vorkommt. Es sei also (λ_n) eine unendliche Teilfolge aus der Folge der natürlichen Zahlen (n) mit der Eigenschaft

$$i_{\lambda_n} = k \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Für alle n gilt wegen (4)

$$\begin{aligned} x_0 - x_{\lambda_n} &= 2^{-(d_1+1)} + 2^{-(d_1+d_2+2)} + \ldots + 2^{-(d_1+\ldots+d_k+k)} + \ldots \\ &\quad - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+1)} - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+d_{\lambda_n,2}+2)} - \ldots - \\ &\quad - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+\ldots+d_{\lambda_n,2}+k)} - \ldots \\ &= 2^{-(d_1+\ldots+d_k+k)} + 2^{-(d_1+\ldots+d_{k+1}+k+1)} + \ldots \\ &\quad - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+\cdots+d_{\lambda_n,k}+k)} - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+\cdots+d_{\lambda_n,k+1}+k+1)} - \ldots \\ &= 2^{-(d_1+\ldots+d_{k-1}+k)}\left\{2^{-d_k} + 2^{-(d_k+d_{k+1}+1)} + \ldots \right. \\ &\quad \left. -\left[2^{-d_{\lambda_n,k}} + 2^{-(d_{\lambda_n,k}+d_{\lambda_n,k+1}+1)} + \ldots\right]\right\}. \end{aligned}$$

Nach unserer Voraussetzung sind alle x_{λ_n} kleiner als x. Weil für jedes λ_n stets $i(x_{\lambda_n}, x) = k$ ist, gilt also wegen (B) für alle λ_n die Beziehung

$$d_k + 1 \leqq d_{\lambda_n,k}.$$

Setzt man das in die vorhergehende Formel ein, so erhält man für alle n

$$\begin{aligned} x_0 - x_{\lambda_n} &= 2^{-(d_1+\ldots+d_k+k)}\left\{1 + 2^{-(d_{k+1}+1)} + \ldots \right. \\ &\quad \left. - 2^{-(d_{\lambda_n,k}-d_k)}\left[1 + 2^{-(d_{\lambda_n,k+1}+1)} + \ldots\right]\right\} \\ &\geqq 2^{-(d_1+\ldots+d_k+k))}\left[1 + 2^{-(d_{k+1}+1)} - 2^{-1}(1 + 2^{-1} + \ldots)\right] \\ &= 2^{-(d_1+\ldots+d_{k+1}+k+1)} > 0. \end{aligned}$$

Für alle n gilt demnach

$$x - x_{\lambda_n} \geqq 2^{-(d_1 + \ldots + d_{k+1} + k + 1)} > 0 .$$

Das bedeutet aber gerade

$$\liminf (x - x_{\lambda_n}) > 0 ,$$

d.h. die Folge (x_n) kann nicht gegen x konvergieren. Damit ergibt sich ein Widerspruch gegen die Annahme, dass $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = \infty$ nicht gilt. Somit ist diese Annahme falsch und der Hilfssatz bewiesen.

5. Konstruktion einer Lösung von (2)

Es sei (d_m) eine Z-Folge aus D. (Siehe Abschnitt 2). Jeder solchen Folge kann man einen Ausdruck

$$z = \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} \tag{5}$$

zuordnen. Dabei bedeutet $\sum\limits_{m}^{*}$ die Summe über alle m, für die $d_m \neq 0$ ist. Es lässt sich zeigen, dass z entweder eine positive reelle Zahl ist oder ∞. Denn nach Definition einer Z-Folge (d_m) sind alle d_m nicht negativ, und mindestens ein d_m ist von Null verschieden. Die Folge der Partialsummen

$$\left(\sum_{m=1}^{M}{}^{*} d_m^{-1} \right)$$

ist daher eine monoton steigende Folge. Also ist z entweder konvergent oder bestimmt divergent. Es gilt daher

$$z \,\varepsilon\, (0, \infty] .$$

Nach den Überlegungen im Abschnitt 3 kann man jeder reellen Zahl aus (0,1) in eineindeutiger Weise eine Z-Folge aus D zuordnen. Somit kann man mit (5) auf folgende Art eine positive reelle Funktion erklären: Wenn

$$x \leftrightarrow (d_m)$$