

4. SÄTZE ÜBER DAS RECHNEN MIT Z-FOLGEN

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

4. SÄTZE ÜBER DAS RECHNEN MIT Z-FOLGEN

Die eindeutige Zuordnung der reellen Zahlen aus $(0,1)$ zu den Z-Folgen aus D schreiben wir abgekürzt in der Form

$$x \leftrightarrow (d_m) \quad x \in (0,1), \quad (d_m) \in D.$$

Damit ist gemeint, dass (d_m) die der Zahl x gemäss (Z) zugeordnete Z-Folge ist. Daraus kann man sofort folgende Aussage ableiten:

(A) Wenn $x_1 \leftrightarrow (d_{1,m})$ und $x_2 \leftrightarrow (d_{2,m})$ ist, so ist $x_1 = x_2$ gleichbedeutend mit $d_{1,m} = d_{2,m}$ für alle $m = 1, 2, 3, \dots$

Das gibt jetzt Anlass zu der

DEFINITION 1. Die natürliche Zahl $i = i(x_1, x_2)$ heisst der Index zweier verschiedener reeller Zahlen x_1 und x_2 aus $(0,1)$, wenn folgendes gilt:

$$1. \quad x_1 \leftrightarrow (d_{1,m}) \text{ und } x_2 \leftrightarrow (d_{2,m})$$

$$2. \quad d_{1,i} \neq d_{2,i}$$

3. Wenn $i > 1$ ist, so sei auch $d_{1,k} = d_{2,k}$ für alle $k = 1, 2, \dots, i - 1$.

Mit dieser Bezeichnung gilt jetzt

(B) Es sei

$$x_1 \neq x_2, \quad x_1 \leftrightarrow (d_{1,m}), \quad x_2 \leftrightarrow (d_{2,m}) \text{ und } i = i(x_1, x_2).$$

Dann ist $x_1 > x_2$ gleichbedeutend mit $d_{1,i} < d_{2,i}$.

HILFSSATZ 2. a) Es sei $x \leftrightarrow (d_m)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k(\varepsilon)$ derart, dass für alle $y \in (0,1)$ aus der Beziehung $i(x, y) > k$ die Beziehung $|x - y| < \varepsilon$ folgt.

b) Es sei

$$x_n \leftrightarrow (d_{n,m}), \quad x \leftrightarrow (d_m), \quad x_n \neq x \text{ und } i_n = i(x_n, x)$$

für $n = 1, 2, \dots$. Dann folgt aus $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$ die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Beweis. Da *b)* unmittelbar aus *a)* folgt, genügt es, *a)* zu beweisen. $\varepsilon > 0$ sei beliebig und fest. Wir wählen jetzt eine natürliche Zahl k so, dass $\varepsilon > 2^{1-k}$ ist, und betrachten nur solche y aus $(0,1)$, für die $i(x, y) \geq k + 1$ ist. Ein solches y greifen wir heraus. Die zugeordnete *Z-Folge* sei (d_m^*) , und der Index sei i^* . Dann kann man die Differenz $|x - y|$ vermöge (3) abschätzen:

$$\begin{aligned} |x - y| &= |2^{-(d_1 + \dots + d_{k+1} + k + 1)} + 2^{-(d_1 + \dots + d_{k+2} + k + 2)} + \dots \\ &\quad - 2^{-(d_1^* + \dots + d_{k+1}^* + k + 1)} - 2^{-(d_{k+1}^* + \dots + d_{k+2}^* + k + 2)} - \dots| \\ &\leq 2^{-(d_1 + \dots + d_k + k + 1)} [2^{-d_{k+1}} + 2^{-(d_{k+1} + d_{k+2} + 1)} + \dots \\ &\quad + 2^{-d_{k+1}^*} + 2^{-(d_{k+1}^* + d_{k+2}^* + 1)} + \dots] \\ &\leq 2^{-(d_1 + \dots + d_k + k + 1)} [1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots] \\ &\leq 2^{-(d_1 + \dots + d_k)} 2^{-k+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass die Aussage *b)* in Hilfssatz 2 nicht umkehrbar ist. Das zeigt das Beispiel

$$\begin{aligned} x_n &= 2^{-1} + 2^{-5} + 2^{-5-n} \leftrightarrow (d_{n,m}) = (0, 3, n, 0, 0, \dots, 0, \dots) \\ x &= 2^{-1} + 2^{-5} \leftrightarrow (d_m) = (0, 4, 0, 0, \dots, 0, \dots). \end{aligned}$$

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = 2$.

Im weiteren benötigen wir oft den bekannten

HILFSSATZ 3. (q_l) sei eine Folge natürlicher Zahlen. Dann ist die Negation der Aussage $\lim_{l \rightarrow \infty} q_l = \infty$ gleichwertig mit der Aussage, dass in der Folge (q_l) eine feste natürliche Zahl k unendlich oft vorkommt.

Weiter brauchen wir den

HILFSSATZ 4. Es sei $x_n \leftrightarrow (d_{n,m})$, $x \leftrightarrow (d_m)$, $x_n < x$ und $i_n = i(x_n, x)$ für $n = 1, 2, 3, \dots$. Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ gleichwertig mit $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$.

Beweis. Wegen Hilfssatz 2, b) haben wir nur zu beweisen, dass unter der angegebenen Voraussetzung aus $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ die Behauptung $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$ folgt. Wir führen den Beweis indirekt. Aus der Annahme, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$ nicht gilt, folgt mit Hilfssatz 3, dass es eine natürliche Zahl k gibt, die in der Folge der (i_n) unendlich oft vorkommt. Es sei also (λ_n) eine unendliche Teilfolge aus der Folge der natürlichen Zahlen (n) mit der Eigenschaft

$$i_{\lambda_n} = k \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4)$$

Für alle n gilt wegen (4)

$$\begin{aligned} x_0 - x_{\lambda_n} &= 2^{-(d_1+1)} + 2^{-(d_1+d_2+2)} + \dots + 2^{-(d_1+\dots+d_k+k)} + \dots \\ &\quad - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+1)} - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+d_{\lambda_n,2}+2)} - \dots - \\ &\quad - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+\dots+d_{\lambda_n,2}+k)} - \dots \\ &= 2^{-(d_1+\dots+d_k+k)} + 2^{-(d_1+\dots+d_{k+1}+k+1)} + \dots \\ &\quad - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+\dots+d_{\lambda_n,k}+k)} - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+\dots+d_{\lambda_n,k+1}+k+1)} - \dots \\ &= 2^{-(d_1+\dots+d_{k-1}+k)} \{ 2^{-d_k} + 2^{-(d_k+d_{k+1}+1)} + \dots \\ &\quad - [2^{-d_{\lambda_n,k}} + 2^{-(d_{\lambda_n,k}+d_{\lambda_n,k+1}+1)} + \dots] \}. \end{aligned}$$

Nach unserer Voraussetzung sind alle x_{λ_n} kleiner als x . Weil für jedes λ_n stets $i(x_{\lambda_n}, x) = k$ ist, gilt also wegen (B) für alle λ_n die Beziehung

$$d_k + 1 \leq d_{\lambda_n, k}.$$

Setzt man das in die vorhergehende Formel ein, so erhält man für alle n

$$\begin{aligned} x_0 - x_{\lambda_n} &= 2^{-(d_1+\dots+d_k+k)} \{ 1 + 2^{-(d_{k+1}+1)} + \dots \\ &\quad - 2^{-(d_{\lambda_n,k}-d_k)} [1 + 2^{-(d_{\lambda_n,k+1}+1)} + \dots] \} \\ &\geq 2^{-(d_1+\dots+d_k+k)} [1 + 2^{-(d_{k+1}+1)} - 2^{-1}(1 + 2^{-1} + \dots)] \\ &= 2^{-(d_1+\dots+d_{k+1}+k+1)} > 0. \end{aligned}$$

Für alle n gilt demnach

$$x - x_{\lambda_n} \geq 2^{-(d_1 + \dots + d_{k+1} + k + 1)} > 0.$$

Das bedeutet aber gerade

$$\liminf (x - x_{\lambda_n}) > 0,$$

d.h. die Folge (x_n) kann nicht gegen x konvergieren. Damit ergibt sich ein Widerspruch gegen die Annahme, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$ nicht gilt. Somit ist diese Annahme falsch und der Hilfssatz bewiesen.

5. KONSTRUKTION EINER LÖSUNG VON (2)

Es sei (d_m) eine Z -Folge aus D . (Siehe Abschnitt 2). Jeder solchen Folge kann man einen Ausdruck

$$z = \sum_{m=1}^{\infty} * d_m^{-1} \quad (5)$$

zuordnen. Dabei bedeutet \sum_m^* die Summe über alle m , für die $d_m \neq 0$ ist. Es lässt sich zeigen, dass z entweder eine positive reelle Zahl ist oder ∞ . Denn nach Definition einer Z -Folge (d_m) sind alle d_m nicht negativ, und mindestens ein d_m ist von Null verschieden. Die Folge der Partialsummen

$$\left(\sum_{m=1}^M * d_m^{-1} \right)$$

ist daher eine monoton steigende Folge. Also ist z entweder konvergent oder bestimmt divergent. Es gilt daher

$$z \in (0, \infty].$$

Nach den Überlegungen im Abschnitt 3 kann man jeder reellen Zahl aus $(0,1)$ in eindeutiger Weise eine Z -Folge aus D zuordnen. Somit kann man mit (5) auf folgende Art eine positive reelle Funktion erklären: Wenn

$$x \leftrightarrow (d_m)$$