

# Supplément

Objektyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Evidemment, si de plus  $f(0) = 0$ ,  $V(0) = 0$ ,  $V_0^*(\phi) < 0$  ( $\phi \neq 0$ ), toutes les solutions de (9) tendent vers zéro (stabilité asymptotique).

Pour appliquer ces résultats à (1), on peut définir la fonction (voir [1])

$$V(\phi) = G(\phi(0)) - \frac{1}{2} \int_{-r}^0 \dot{a}(-\theta) \left[ \int_{\theta}^0 g(\phi(s)) ds \right]^2 d\theta$$

pour laquelle

$$V_1^*(\phi) = \frac{1}{2} \dot{a}(r) \left[ \int_{-r}^0 g(\phi(\theta)) d\theta \right]^2 - \frac{1}{2} \int_{-r}^0 \ddot{a}(-\theta) \left[ \int_{\theta}^0 g(\phi(s)) ds \right]^2 d\theta,$$

pour  $\phi \in C_H$  et on peut déduire le théorème 1 directement du théorème 4. Si

$$a(t) = \frac{1}{r}(r-t)$$

on obtient le théorème 2 A de la même manière; mais de la théorie générale (théorème 3) on peut seulement déduire que  $\Omega(x(\phi))$  est un tore de solutions de l'équation différentielle ordinaire

$$y'' + g(y) = 0$$

qui satisfont

$$\int_{-r}^0 g(y(t+\theta)) d\theta = 0, \quad -\infty < t < \infty.$$

Pour obtenir le théorème 2 B, C il faut employer les arguments particuliers de [1]. Pour l'idée de cette démonstration voir le supplément.

#### SUPPLÉMENT

Avec  $a(t) = \frac{1}{r}(r-t)$  il s'ensuit de (5), (6) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-r}^t g(x(s)) ds = 0.$$

Puisque chaque solution de (1) satisfait l'équation

$$x''(t) + g(x(t)) = \frac{1}{r} \int_{t-r}^t g(x(s)) ds \quad (0 \leq t < \infty),$$

on infère que la solution  $x(t)$  tend, dans un sens convenable, vers une solution de l'équation différentielle ordinaire

$$(10) \quad u''(t) + g(u(t)) = 0,$$

quand  $t \rightarrow \infty$ . Rappelons que toutes les solutions de (10) sont périodiques (voir (3)) et satisfont

$$(11) \quad G(u(t)) + \frac{1}{2} (u'(t))^2 \equiv k \quad (-\infty < t < \infty),$$

où  $k$  est une constante; donc les solutions forment les cycles fermés dans le plan  $u, u'$ . La démonstration précise ces observations.

D'abord, on a de (4) et (5) au-dessus que  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = v$  existe. Supposons que nous ne nous trouvons pas dans le cas trivial  $v = 0$  — donc  $\Gamma^+(x(t)) \neq (0, 0)$ , l'origine du plan. A cause de la continuité des solutions de l'équation (10) par rapport aux valeurs initiales et de la définition d'un ensemble limite on peut donner la description suivante de l'ensemble  $\Gamma^+(x(t))$ :

(i) Si  $(\alpha, \beta) \in \Gamma^+(x(t))$ , le cycle fermé  $\gamma(\alpha, \beta)$  de l'équation (10) dans le plan  $u, u'$  à travers  $(\alpha, \beta)$  appartient à  $\Gamma^+(x(t))$ .

(ii) Soit  $(\alpha_1, \beta_1)$  et  $(\alpha_2, \beta_2)$  deux points dans  $\Gamma^+(x(t))$  et définissons le tore  $D(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$  l'ensemble fermé et connexe de tous les points dans le plan  $u, u'$  entre et sur les deux cycles fermés  $\gamma(\alpha_1, \beta_1)$  et  $\gamma(\alpha_2, \beta_2)$ . On a  $D(0, 0; 0, 0) = (0, 0)$  et  $D(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2) = \gamma(\alpha_1, \beta_1)$  si et seulement si  $(\alpha_2, \beta_2) \in \gamma(\alpha_1, \beta_1)$ . En utilisant encore la continuité, on montre qu'il existe deux points  $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$ , tels que  $\Gamma^+(x(t)) = D(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$ .

Le but est de montrer que le tore  $D(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$  s'écroule dans un seul cycle; c'est-à-dire qu'il existe un point  $(p, q) \in \Gamma^+(x(t))$  tel que  $\Gamma^+(x(t)) = \gamma(p, q)$ . Pour accomplir ceci on montre d'abord, en utilisant la continuité et la périodicité des solutions  $u(t, t_0, \alpha, \beta)$  de (10) où  $u(t_0, t_0, \alpha, \beta) = \alpha, u'(t_0, t_0, \alpha, \beta) = \beta$ , que

$$\int_{t-r}^t g(u(\tau, t_0; \alpha, \beta)) d\tau = 0$$

pour chaque  $(\alpha, \beta) \in \Gamma^+(x(t))$ . Il s'ensuit que

$$u(t+r, t_0, \alpha, \beta) = u(t, t_0, \alpha, \beta) \quad (-\infty < t, t_0 < \infty),$$

et par conséquent il existe un nombre entier  $m \geq 1$ , indépendant de  $(\alpha, \beta)$ , tel que  $r = m\rho(\alpha, \beta)$ , où  $\rho$  est définie dans le théorème 2. Par les mêmes méthodes on montre — voir (4)

$$(12) \quad G(u(t, t_0, \alpha, \beta)) + \frac{1}{2r} \int_{t-r}^t \int_{\tau}^t g(u(s, t_0, \alpha, \beta) ds)^2 d\tau = v = \lim_{t \rightarrow \infty} V(t),$$

pour  $-\infty < t, t_0 < \infty$ . Puisque  $v > 0$ , on trouve que  $(0, 0) \notin \Gamma^+(x(t))$  et donc  $\Gamma^+(x(t))$  est un anneau dans le plan  $u, u'$  sans l'origine. On peut tirer la conclusion B, théorème 2, directement de (12) et de cette remarque, voir [1], et évidemment on a aussi C.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] LEVIN, J. J., A. J. NOHEL, On a nonlinear delay equation. *J. Math. Anal. Appl.*, .., 1964, 31-44.
- [2] HALE, J. K., Sufficient conditions for stability and instability of autonomous functional-differential equations. *J. Diff. Equ.*, 1, 1965, 452-82.
- [3] MILLER, R. K., Asymptotic behaviour of nonlinear delay-differential equations. *J. Diff. Equ.*, 1, 1965, 293-305.
- [4] VOGEL, Th., *Sur quelques types de systèmes évolutifs non dynamiques*. Inst. Etud. Sup. OTAN, Padoue, sept. 1965, 55 p.

( Reçu le 1<sup>er</sup> août 1966 )

University of Wisconsin  
Madison, Wis.