# Supplément

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Evidemment, si de plus $f(0) = 0$, $V(0) = 0$, $V_9^*(\phi) < 0\ (\phi \neq 0)$, toutes les solutions de (9) tendent vers zéro (stabilité asymptotique).

Pour appliquer ces résultats à (1), on peut définir la fonction (voir [1])

$$V(\phi) = G(\phi(0)) - \tfrac{1}{2}\int_{-r}^{0} \dot{a}(-\theta)\Big[\int_{\theta}^{0} g(\phi(s))\,ds\Big]^2 d\theta$$

pour laquelle

$$V_1^*(\phi) = \tfrac{1}{2}\dot{a}(r)\Big[\int_{-r}^{0} g(\phi(\theta))\,d\theta\Big]^2 - \tfrac{1}{2}\int_{-r}^{0} \ddot{a}(-\theta)\Big[\int_{\theta}^{0} g(\phi(s))\,ds\Big]^2 d\theta\,,$$

pour $\phi \in C_H$ et on peut déduire le théorème 1 directement du théorème 4. Si

$$a(t) = \frac{1}{r}(r-t)$$

on obtient le théorème 2 A de la même manière; mais de la théorie générale (théorème 3) on peut seulement déduire que $\Omega(x(\phi))$ est un tore de solutions de l'équation différentielle ordinaire

$$y'' + g(y) = 0$$

qui satisfont

$$\int_{-r}^{0} g(y(t+\theta))\,d\theta = 0\,, \qquad -\infty < t < \infty\,.$$

Pour obtenir le théorème 2 B, C il faut employer les arguments particuliers de [1]. Pour l'idée de cette démonstration voir le supplément.

## Supplément

Avec $a(t) = \dfrac{1}{r}(r-t)$ il s'ensuit de (5), (6) que

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t-r}^{t} g(x(s))\,ds = 0\,.$$

Puisque chaque solution de (1) satisfait l'équation

$$x''(t) + g(x(t)) = \frac{1}{r}\int_{t-r}^{t} g(x(s))\,ds \qquad (0 \leqq t < \infty),$$

on infère que la solution $x(t)$ tend, dans un sens convenable, vers une solution de l'équation différentielle ordinaire

$$u''(t) + g(u(t)) = 0, \tag{10}$$

quand $t \to \infty$. Rappelons que toutes les soluions de (10) sont périodiques (voir (3)) et satisfont

$$G(u(t)) + \frac{1}{2}(u'(t))^2 \equiv k \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{11}$$

où $k$ est une constante; donc les solutions forment les cycles fermés dans le plan $u, u'$. La démonstration précise ces observations.

D'abord, on a de (4) et (5) au-dessus que $\lim_{t \to \infty} V(t) = v$ existe. Supposons que nous ne nous trouvons pas dans le cas trivial $v = 0$ — donc $\Gamma^+(x(t)) \neq (0, 0)$, l'origine du plan. A cause de la continuité des solutions de l'équation (10) par rapport aux valeurs initiales et de la définition d'un ensemble limite on peut donner la description suivante de l'ensemble $\Gamma^+(x(t))$:

(i) Si $(\alpha, \beta) \in \Gamma^+(x(t))$, le cycle fermé $\gamma(\alpha, \beta)$ de l'équation (10) dans le plan $u, u'$ à travers $(\alpha, \beta)$ appartient à $\Gamma^+(x(t))$.

(ii) Soit $(\alpha_1, \beta_1)$ et $(\alpha_2, \beta_2)$ deux points dans $\Gamma^+(x(t))$ et définissons le tore $D(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$ l'ensemble fermé et connexe de tous les points dans le plan $u, u'$ entre et sur les deux cycles fermés $\gamma(\alpha_1, \beta_1)$ et $\gamma(\alpha_2, \beta_2)$. On a $D(0, 0; 0, 0) = (0, 0)$ et $D(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2) = \gamma(\alpha_1, \beta_1)$ si et seulement si $(\alpha_2, \beta_2) \in \gamma(\alpha_1, \beta_1)$. En utilisant encore la continuité, on montre qu'il existe deux points $(\alpha_1, \beta_1)$, $(\alpha_2, \beta_2)$, tels que $\Gamma^+(x(t)) = D(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$.

Le but est de montrer que le tore $D(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$ s'écroule dans un seul cycle; c'est-à-dire qu'il existe un point $(p, q) \in \Gamma^+(x(t))$ tel que $\Gamma^+(x(t)) = \gamma(p, q)$. Pour accomplir ceci on montre d'abord, en utilisant la continuité et la périodicité des solutions $u(t, t_0, \alpha, \beta)$ de (10) où $u(t_0, t_0, \alpha, \beta) = \alpha$, $u'(t_0, t_0, \alpha, \beta) = \beta$, que

$$\int_{t-r}^{t} g(u(\tau, t_0; \alpha, \beta))\,d\tau = 0$$

pour chaque $(\alpha, \beta) \in \Gamma^+ (x(t))$. Il s'ensuit que

$$u(t+r, t_0, \alpha, \beta) = u(t, t_0, \alpha, \beta) \qquad (-\infty < t, t_0 < \infty),$$

et par conséquent il existe un nombre entier $m \geqq 1$, indépendant de $(\alpha, \beta)$, tel que $r = m\rho(\alpha, \beta)$, où $\rho$ est définie dans le théorème 2. Par les mêmes méthodes on montre — voir (4)

$$(12) \quad G(u(t, t_0, \alpha, \beta) + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t} [\int_{\tau}^{t} g(u(s, t_0, \alpha, \beta)\, ds]^2\, d\tau = v = \lim_{t\to\infty} V(t),$$

pour $-\infty < t, t_0 < \infty$. Puisque $v > 0$, on trouve que $(0, 0) \notin \Gamma^+ (x(t))$ et donc $\Gamma^+ (x(t))$ est un anneau dans le plan $u, u'$ sans l'origine. On peut tirer la conclusion $B$, théorème 2, directement de (12) et de cette remarque, voir [1], et évidemment on a aussi $C$.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] LEVIN, J. J., A. J. NOHEL, On a nonlinear delay equation. *J. Math. Anal. Appl.*, ., 1964, 31-44.

[2] HALE, J. K., Sufficient conditions for stability and instability of autonomous functional-differential equations. *J. Diff. Equ.*, *1*, 1965, 452-82.

[3] MILLER, R. K., Asymptotic behaviour of nonlinear delay-differential equations. *J. Diff. Equ.*, *1*, 1965, 293-305.

[4] VOGEL, Th., *Sur quelques types de systèmes évolutifs non dynamiques*. Inst. Etud. Sup. OTAN, Padoue, sept. 1965, 55 p.


*(Reçu le 1er août 1966)*

University of Wisconsin
Madison, Wis.