**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 12 (1966)

**Heft:** 3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** RAPPORT SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES POUR LES PHYSICIENS

**Autor:** Pisot, Ch.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-40742

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 16.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# RAPPORT SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES POUR LES PHYSICIENS[1]

par Ch. Pisot

Permettez-moi d'exprimer d'abord tous mes remerciements à tous ceux qui ont contribué par leurs rapports, leurs réponses, leurs envois, à l'élaboration de ce rapport. Les envois reçus reflètent les différences de structure des enseignements dans les divers pays. En ne demandant pas de réponse à un questionnaire précis, qui forcément dépend de l'orientation d'esprit de celui qui formule les questions, les préoccupations et l'individualité de chaque pays apparaissent plus nettement.

Dans ce rapport, j'ai essayé de m'inspirer au mieux de ces diverses tendances et je voudrais vous exposer aussi objectivement que possible les divers points de vue. Je m'excuse d'avance de n'avoir pas toujours peut-être pu me dégager entièrement de ma propre position et que j'ai nettement mis l'accent sur ce qui est commun et qui unit, plutôt que sur les divergences.

## *1. Considérations générales*

Parmi toutes les Sciences expérimentales, la Physique est celle qui utilise le plus le raisonnement mathématique sous sa forme la plus évoluée et la plus complexe. L'interpénétration des deux disciplines est si grande que, aussi paradoxal que cela puisse paraître, la séparation nette entre la Physique, science expérimentale, et les Mathématiques, science déductive, n'a pendant longtemps pas été consciente. L'exemple le plus typique à ce sujet est celui de la géométrie euclidienne, pour laquelle il n'existe même pas de nom pour distinguer son aspect physique et expérimental de son aspect abstrait et purement déductif. Cette confusion a d'ailleurs été le principal obstacle à la compréhension et à l'assimilation de la théorie de la relativité.

La prise de conscience de cette différence a été à l'origine d'un développement prodigieux à la fois de la Physique qui a su mieux utiliser et reconnaître

[1] Rapport présenté au Congrès International des mathématiciens à Moscou, session de la C.I.E.M. du 22 août 1966.

la portée des outils mathématiques, et également des Mathématiques qui ont été contraintes de revoir leurs fondements et leurs structures. Ces progrès n'ont pas été sans une diversification et une spécialisation qui font apparaître actuellement une divergence sérieuse entre les deux disciplines. Il y a des mathématiciens qui défendent le point de vue que les Mathématiques sont assez riches pour n'avoir besoin d'aucune stimulation extérieure, et il y a des physiciens qui de leur côté pensent qu'il est inutile de suivre les mathématiciens dans leurs développements abstraits et qu'il n'y a qu'à utiliser des Mathématiques « de physicien ».

Il faut toutefois reconnaître que l'opinion générale souhaite l'harmonisation de toutes nos disciplines scientifiques. D'autres disciplines expérimentales comme la Chimie, la Biologie, la Géologie, utilisent des Mathématiques de plus en plus développées, ce qui renforce la position de ceux qui voudraient que les Mathématiques soient une discipline de base, valable pour toutes les sciences.

Pour atteindre un tel objectif, le problème fondamental est celui de l'enseignement des Mathématiques. C'est lui qui conditionne l'attitude d'esprit du futur scientifique et lui donnera des critères de jugements. Si ce point de vue est adopté, il en résulte immédiatement un premier objectif pour l'enseignement des Mathématiques. La motivation principale de celui-ci doit alors consister dans l'initiation à la forme de pensée qui se dégage des développements mathématiques actuels. Celle-ci conduira ainsi à la compréhension non seulement des théories actuelles, mais donnera la possibilité d'adaptation à des idées nouvelles; ce dernier point prend de plus en plus d'importance à mesure que le progrès s'accélère. L'opinion générale qui s'est dégagée de la plupart des réunions qui ont eu lieu dans ce but, consiste à penser qu'il est indispensable d'enseigner les Mathématiques sous leur forme moderne, dégageant les structures fondamentales.

Il ne faut cependant pas perdre de vue que les Mathématiques ne sont pour la Science expérimentale qu'un outil de pensée, qui doit permettre la compréhension plus profonde des relations entre les phénomènes expérimentaux. Parmi ceux-ci, certains occupent une place plus fondamentale que d'autres, comme en Physique par exemple la notion d'énergie. Il faut donc aussi que l'enseignement mathématique arrive aussi rapidement que possible à fournir les notions utiles pour ces concepts.

Les deux exigences mentionnées créent toute la difficulté du problème de l'enseignement des Mathématiques, et il faut bien l'avouer, celui-ci n'a pas encore reçu de solution vraiment satisfaisante. Cependant, il semble

que depuis quelque temps les points de vue se rapprochent et, « par approximations successives » on tend vers une doctrine acceptable.

Il y a d'abord des positions extrêmes, qui ont chacune leurs partisans. Dans la première, l'enseignement des Mathématiques est le même pour les futurs mathématiciens et pour les futurs physiciens. La position opposée sépare le plus tôt possible, c'est-à-dire dès l'entrée en Université (18 ans) les Mathématiques des physiciens de celles des mathématiciens et leur fournit un enseignement tout à fait particulier. Entre ces positions, il y a évidemment toute la gamme de possibilités intermédiaires.

La difficulté principale consiste dans le fait que la Physique a besoin de beaucoup de Mathématiques, il n'est pas exagéré de dire qu'un physicien devrait savoir davantage de Mathématiques qu'un mathématicien de profession; ce dernier peut parfois se cantonner dans sa spécialité, tandis que le physicien doit faire des rapprochements avec toutes sortes de théories mathématiques. La solution d'enseigner au physicien les mêmes Mathématiques qu'au mathématicien est donc tout à fait logique. L'inconvénient de cette solution consiste dans le fait déjà mentionné que le mathématicien peut très bien se borner à l'étude de quelques théories fondamentales, exposées avec toutes leurs conséquences et leur complexité, et finalement le champ mathématique exploré manque d'étendue pour le physicien. Ce dernier aura appris à manier un nombre restreint d'outils mathématiques, mais pourra ignorer d'autres formes de la pensée mathématique.

La séparation totale des enseignements présente également des avantages, surtout si l'enseignement est assuré par un physicien. Ce dernier saura dans chaque cas montrer l'application de la théorie. L'inconvénient majeur consiste en ce qu'un tel enseignement risque de glisser rapidement vers un enseignement de recettes et la partie consacrée à la pensée mathématique ira en s'amenuisant; l'adaptation à de nouvelles théories deviendra plus difficile. C'est au fond un tel phénomène qui s'est produit dans l'enseignement de la géométrie.

Comme souvent, la solution la plus raisonnable est entre les deux extrêmes. Comme cela a été fortement affirmé dans toutes les réunions, la préoccupation fondamentale de l'enseignement, surtout au niveau de 16 à 18 ans, doit être la coordination aussi étroite que possible entre les Mathématiques et la Physique. Cette coordination est le nœud même du problème dans l'enseignement secondaire, et tout ce qui pourra la faciliter constituera un pas en avant pour un enseignement plus efficace. Cette exigence est moins primordiale dans l'enseignement supérieur, tout en restant très

souhaitable. L'idéal consiste à introduire une théorie mathématique par des considérations de la Physique; elle sera ensuite axiomatisée et développée déductivement; finalement les conclusions seront confrontées avec les résultats expérimentaux.

Il se trouve malheureusement que beaucoup de faits physiques nécessitent des théories mathématiques qui sont d'un niveau nettement plus élevé que le niveau de l'élève ou de l'étudiant. Cette difficulté majeure n'a pas encore trouvé une bonne solution. Ce qui est généralement préconisé, c'est de donner dans un tel cas les règles d'utilisation de l'outil mathématique avec ses limites précises, mais sans démonstrations. C'est ainsi que l'on a appris à calculer avec les nombres réels bien avant d'en donner une définition. Peut-être peut-on espérer, dans l'enseignement secondaire au moins, que l'on puisse faire une adaptation réciproque des programmes de Mathématique et de Physique de sorte que cette difficulté puisse être éliminée.

Pour tenir compte de cette difficulté, nous avons partagé les programmes proposés dans la suite en deux parties. La partie A représente ce qui peut être enseigné entièrement déductivement, la partie B comporte les matières dont la théorie n'est pas à faire complètement, soit que son niveau dépasse celui de l'élève, soit qu'elle comporte de trop longs développements sans utilité immédiate pour la Physique. Il est clair que ce partage n'a rien d'absolu ni de définitif et pourra être modifié suivant les besoins.

Enfin devant les progrès rapides des sciences, il ne faut pas oublier d'envisager des révisions périodiques des programmes; ces révisions permettront à la fois de tenir compte des expériences acquises dans l'enseignement et de supprimer ou d'ajouter telle ou telle théorie suivant le développement de la Physique.

## 2. *Programmes proposés*

### *a) Fin de l'enseignement secondaire (16 à 18 ans)*

Avant 15 ans, l'enseignement des Mathématiques consiste essentiellement à faire acquérir les mécanismes de calcul numérique et algébrique et des notions de géométrie élémentaire, ainsi qu'une initiation sans systématisation au raisonnement abstrait. La Physique, si elle est enseignée avant 15 ans, se contente de la description de certains faits expérimentaux, avec éventuellement des calculs très simples.

Ce n'est qu'entre 15 et 18 ans que l'on aborde en général sérieusement l'étude de la Physique et des Mathématiques. Il ne paraît pas souhaitable de séparer à ce niveau les futurs physiciens des futurs mathématiciens. Les phénomènes étudiés en Physique nécessitent les notions fondamentales des espaces vectoriels, de la géométrie surtout analytique, de la trigonométrie, de la dérivée et de l'intégrale (même de l'intégrale curviligne pour la notion d'énergie). Il ne semble pas possible de traiter toutes ces matières dans la partie A, donc dès ce niveau il y a un partage en parties A et B.

Voici, à titre indicatif, le programme élaboré à Dakar:

*Partie A*

*Ensembles* (symboles $\cup$, $\subset$, $\in$, $\cap$, $\exists$, $\forall$, négation).
*Relations* (Ordre, équivalence).
*Fonctions* (application d'un ensemble dans un autre).
*Groupes*
*Nombres* naturels, nombres entiers, nombres rationnels (les nombres réels sont en B.)
*Nombres complexes*, *Trigonométrie.*
*Espaces vectoriels*, systèmes linéaires (matrices et déterminants exclus).
*Groupe linéaire et groupe homographique* (ce dernier aussi en vue de l'optique géométrique).
*Géométrie analytique.*
*Calcul différentiel.*
*Equations différentielles à coefficients constants.*

*Partie B*

*Nombres réels.*
*Graphiques.*
*Primitives* et *Intégrales* (sommes de Riemann).
*Logarithme* et *Exponentielle*; Règle à calcul.
*Fonctions vectorielles à plusieurs variables*, dérivées partielles.
Eléments de *programmation linéaire.*
Eléments de *probabilités.*

*b) Premier cycle des Facultés (2 années, 18 à 20 ans)*

C'est à ce niveau que se forme et souvent se décide l'orientation scientifique précise de l'étudiant. Il n'est donc pas nécessaire de séparer les ensei-

gnements aux physiciens de ceux aux mathématiciens. Les matières traitées doivent donc autant que possible être fondamentales à la fois pour les Mathématiques et englober le plus d'applications à la Physique. Ce dernier point entraîne nécessairement une partie B assez développée. Une recherche constante s'impose au mathématicien pour trouver des voies permettant de réduire le plus possible la part des théories non démontrées de cette partie.

*Partie A*

*Algèbre linéaire :* Espaces vectoriels, opérateurs linéaires (en principe en dimension finie, mais sans se limiter à cette finitude si la démonstration n'y fait pas appel).

Formes linéaires, bilinéaires, quadratiques; algèbre extérieure, déterminants, équations linéaires.

Matrices, valeurs propres, réduction à la forme diagonale ou triangulaire.

*Fonctions ; Calcul différentiel :* Limite, dérivée, formule de Taylor.

Fonctions usuelles.

Différentielle de fonctions d'une ou de plusieurs variables.

*Intégration :* Intégrale de Riemann, calcul de valeurs approchées.

Extensions usuelles, intégrale curviligne.

*Séries :* Séries numériques, séries entières, séries trigonométriques.

*Fonctions de variable complexe*, Calcul des résidus.

*Equations différentielles :* Equations classiques que l'on sait ramener à des quadratures.

*Partie B*

*Champs de vecteurs* et grandeurs attachées et éventuellement *tenseurs.*

Calcul d'une *intégrale multiple* (formule de Fubini et du changement de variables).

*Intégrale de variété* (avec les différentielles extérieures). Formules de Stokes.

*Probabilités*, lois de Poisson et de Laplace-Gauss. Indépendance, corrélation, régression.

*c) Deuxième cycle des Facultés (2 années, 20 à 22 ans).*

A ce niveau, l'enseignement du futur physicien semble devoir se séparer de celui du futur mathématicien. L'idée maîtresse en paraît être celle d'es-

pace fonctionnel et d'opérateur. Il est indispensable que l'étudiant arrive à reconnaître et à sentir la nécessité de préciser dans quel espace fonctionnel il se trouve: espace vectoriel, dual, celui des applications, etc., sinon il s'introduit une confusion des notions qui rend vite toute étude incompréhensible. L'importance de ces distinctions se révèle de plus en plus être fondamentale.

*Partie A*

*Espaces vectoriels normés. Opérateurs linéaires continus* dans ces espaces. *Vecteurs* et *valeurs propres.*

*Espaces pré-hilbertiens* (espaces ayant un produit hermitien, mais qui ne sont pas nécessairement complets).

*Fonctions orthogonales* et *séries de Fourier.*

Produits tensoriels, *tenseurs*, analyse tensorielle.

*Opérateurs auto-adjoints. Opérateurs intégraux.*

*Equations différentielles*, conditions de Sturm-Liouville, fonction de Green associée.

*Equations aux dérivées partielles linéaires du deuxième ordre* dont les variables se séparent. Etude des caractéristiques dans le cas hyperbolique.

*Calcul différentiel, extremum, équation d'Euler* du calcul des variations.

*Calcul différentiel extérieur, formules de Stokes.*

*Partie B*

*Compléments sur l'intégration*, intégrale de Lebesgue-Stieltjès.

*Distributions, Transformation de Fourier et de Laplace, Convolution.*

*Equations différentielles*, dépendance de la solution des conditions initiales.

*Fonctions spéciales :* fonction Gamma, Bessel, Polynômes orthogonaux.

*Probabilités* et *Statistique :* Fonction caractéristique.

Test de $X^2$, de Student.

Comparaison des moyennes et des variances.

Modèle linéaire; moindres carrés, ajustement d'une loi expérimentale à une loi théorique.

Notions sur le traitement de l'*Information* et la *Cybernétique.*

### *3. Commentaires*

La séparation en divers niveaux qui est présentée ici sous forme dogmatique ne peut être aussi absolue. Il peut être bon de reprendre une notion déjà traitée à un niveau antérieur et l'approfondir à un niveau plus élevé.

D'autre part il faut insister sur l'importance des travaux pratiques de Mathématiques pour le futur physicien. Il ne faut pas que ces travaux pratiques consistent en un complément de théorie, mais on doit y étudier complètement des problèmes autant que possible d'origine physique et les mener jusqu'aux résultats vérifiables.

Le *nombre d'heures* consacré à l'enseignement des Mathématiques par rapport au nombre total d'heures de cours pourrait être de

$\frac{1}{4}$ dans le deuxième degré (16 à 18 ans)

$\frac{1}{2}$ dans le premier cycle des Facultés (18 à 20 ans)

$^1/_5$dans le deuxième cycle des Facultés (20 à 22 ans).

Enfin reste la question de l'*enseignant*. Il ne semble pas contestable que les Mathématiques devraient être enseignées par un mathématicien, c'est-à-dire par un enseignant ayant des préoccupations mathématiques et, au niveau Faculté, étant au courant de l'évolution actuelle de cette science. Cela est indispensable pour qu'il enseigne avec la rigueur nécessaire, analysant la construction d'une théorie mathématique et permettant ainsi l'adaptation future à de nouvelles théories. Mais il n'est pas moins indispensable que l'enseignant s'intéresse à la Physique et qu'il s'en inspire autant que possible pour motiver son cours et pour en tirer des exemples.

Il est malheureusement rare de trouver assez de mathématiciens qui répondent aux deux critères précédents. On sera alors amené à choisir comme enseignants certains physiciens théoriciens ayant gardé suffisamment de goût pour la recherche mathématique pure.

Une autre solution peut être envisagée, c'est la coordination d'un mathématicien et d'un physicien qui travaillent en étroite collaboration, l'un traitant la partie théorique du cours et l'autre les parties plus appliquées. Cette dernière solution, excellente en théorie, semble toutefois se heurter à de nombreuses difficultés pratiques et ne réussira qu'avec des personnes ayant beaucoup de contacts personnels.

De toute manière, il est indispensable pour une bonne réussite de l'enseignement, qu'il y ait une entente profonde entre mathématiciens et physiciens et il faut dans la mesure du possible combler le fossé qui a tendance à se creuser entre les deux disciplines. Un premier pas dans ce sens consisterait déjà à unifier les notations; que le physicien désigne un être mathématique par la même notation que son collègue mathématicien, car il est bien connu qu'un étudiant est profondément troublé par des notations différentes. Il est aussi souhaitable que le physicien utilise effectivement les

notions que le mathématicien met à sa disposition et qui facilitent les exposés et la compréhension (ex.: les différentielles extérieures et le flux). Enfin il faudrait tendre à adapter le déroulement des programmes respectifs dans le temps au mieux des connaissances acquises par les étudiants.

ANNEXE

## Programme européen

### *Premier cycle des Facultés (18 à 20 ans)*

1. *Notions générales d'algèbre.*

Ensembles, sous-ensembles, ensembles produits, fonctions.

Ensembles finis et analyse combinatoire.

Entiers, nombres rationnels, nombres réels, nombres complexes.

Relations définies sur un ensemble; relation d'équivalence, relation d'ordre. Lois de composition définies sur un ensemble.

Structure de groupe, d'anneau, de corps (se borner à des définitions et à quelques exemples, sans théorie générale).

Anneau des polynômes à coefficients rationnels, réels ou complexes. Formule du binôme. Division des polynômes suivant les puissances décroissantes. Plus grand commun diviseur.

Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples.

Enoncé du théorème de d'Alembert-Gauss. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme.

2. *Géométrie analytique et géométrie différentielle classique à deux et trois dimensions.*

Equation des droite, plan, cercle, sphère. Problèmes d'angles et de distances dans $R^2$ et $R^3$.

Coordonnées polaires dans $R^2$.

Etude (à titre d'exemple) de quelques propriétés des coniques par des procédés analytiques. Etude sommaire de quelques quadriques (à titre d'exemple). Génération et représentation de surfaces diverses.

Notions de géométrie affine et de géométrie projective.

Etude d'une courbe plane donnée sous la forme $y = f(x)$ ou sous forme paramétrique: allure générale, étude locale en un point à distance finie ou infinie.

Etude locale d'une courbe de $R^3$ au voisinage d'un point: plan osculateur, courbure, formules de Frenêt; vitesse et accélération d'un mobile, accélération tangentielle et accélération normale.

3. *Algèbre linéaire* (niveau I)

Définition des espaces vectoriels; sous-espaces vectoriels, produits d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels. Indépendance linéaire; bases d'un espace vectoriel de dimension finie.

Applications linéaires; somme, produit, noyau, image, rang.

Calcul matriciel.

Formes linéaires, équations linéaires.

Formes multilinéaires; déterminants.

Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme; équation caractéristique. Réduction d'une matrice à la forme diagonale dans le cas des racines distinctes, et à la forme triangulaire dans le cas général.

Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques; formes hermitiennes.

Espaces affines; parallélisme, vecteurs libres, barycentre, ensembles convexes.

Notions métriques dans les espaces vectoriels sur $R$: norme, distance, produit scalaire et normes associées: inégalité de Cauchy-Schwarz. Bases orthonormales dans $R^n$.

Groupe des déplacements, groupe des rotations autour d'un point; angle de deux vecteurs, orientation de $R^n$; produit vectoriel dans $R^3$.

4. *Nombres réels, fonctions continues, calcul différentiel élémentaire.*

On pourra soit donner une construction du corps des nombres réels, soit en donner une définition axiomatique.

Ensembles de nombres réels: majorants, minorants. Borne supérieure et borne inférieure. Intervalles. Suites bornées, suites convergentes. Théorèmes fondamentaux sur les limites. Critère de Cauchy; théorème de Bolzano-Weierstrass.

Fonctions d'une variable réelle: limites, continuité. Théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues numériques sur un intervalle (valeurs intermédiaires, bornes, continuité uniforme).

Fonctions monotones; existence de la fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone. Exemples de fonctions discontinues.

Dérivées. Calcul des dérivées. Dérivée d'une fonction composée, d'une fonction réciproque.

Théorème de Rolle; théorème des accroissements finis. Formule de Taylor. Maxima et minima des fonctions numériques d'une variable réelle.

Fonctions trigonométriques directes et réciproques d'une variable réelle. Fonction exponentielle, fonction logarithme, fonctions hyperboliques directes et réciproques.

Comparaison des croissances de deux fonctions. Développements limités, applications; division des ploynômes suivant les puissances croissantes.

Fonctions vectorielles d'une variable réelle. Continuité, dérivation, formule de Taylor.

Fonctions de plusieurs variables; continuité. Fonction différentiable en un point, différentielle en ce point. Dérivées partielles en un point, différentiabilité d'une fonction possédant des dérivées partielles continues.

Dérivée d'une fonction composée. Interprétation géométrique: tangente, plan tangent. Calcul des dérivées d'une fonction implicite.

Dérivées partielles d'c rdre supérieur; permutabilité. Formule de Taylor. Maxima et minima des fonctions de plusieurs variables.

5. *Calcul intégral.*

Définition et propriétés de l'intégrale définie d'une fonction intégrable au sens de Riemann; intégrabilité des fonctions continues, des fonctions monotones. Propriétés de la forme linéaire définie par l'intégrale. Relation entre intégrale indéfinie et fonctions primitives. Exemples de fonctions définies par une intégrale.

Méthodes d'intégration. Intégration des fractions rationnelles et des fonctions qui s'y ramènent.

Intégrale définie d'une fonction continue sur un intervalle ouvert (fini ou infini): convergence, convergence absolue.

Définition et propriétés élémentaires de l'intégrale de Riemann-Stieltjès par rapport à une mesure positive sur la droite numérique.

Longueur d'une courbe paramétrée; expression de la longueur pour une paramétrisation à dérivée continue. Intégrales curvilignes.

Notions élémentaires sur les intégrales doubles et triples, et sur leur mode de calcul. Règles du calcul différentiel extérieur, leur application aux intégrales de surface, à la formule du changement de variables dans les intégrales multiples, et aux transformations des intégrales multiples (Stokes). (On ne donnera pas de démonstrations; on pourra se borner à démontrer la formule de Riemann, dans le plan, pour un contour simple). Cas particuliers: gradient, divergence, rotationnel.

6. *Séries.*

Séries à termes réels ou complexes; convergence, critère de Cauchy.

Séries à termes positifs: comparaison, critères classiques de convergence. Séries à termes positifs décroissants: comparaison avec une intégrale.

Séries absolument convergentes. Séries non absolument convergentes, séries alternées.

Suites et séries de fonctions; convergence simple, convergence uniforme. Continuité, dérivation et intégration des suites et séries dans le cas de la convergence uniforme.

Développements en série de $e^x$, $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^z$, arc tg $x$, arc sin $x$.

Théorie élémentaire des séries entières d'une variable réelle ou complexe. Cercle de convergence. Dérivation; intégration dans le domaine réel. Définitions et propriétés de $e^z$, $\sin z$ et $\cos z$ pour $z$ complexe.

Notions élémentaires sur les séries de Fourier: calcul des coefficients.

7. *Equations différentielles.*

Notions fondamentales sur les équations différentielles; trajectoires d'un champ de vecteurs, problèmes de valeurs initiales, problèmes aux limites. Illustration de ces problèmes par des équations intégrables par quadrature; équations linéaires à coefficients constants.

Théorème de superposition linéaire pour les solutions des équations ou des systèmes d'équations linéaires à coefficients variables, avec ou sans second membre.

8. *Analyse numérique.*

Systèmes d'équations linéaires; méthode d'élimination et méthode d'approximations successives. Optimation linéaire; approximation au sens

de Tchebycheff et au sens de Gauss. Algorithmes simples pour le calcul des valeurs propres.

Polynômes et algorithmes de division, comme exemples simples d'algorithmes. Majoration et calcul de racines, méthode d'approximation de Newton, interpolation par les polynômes; fractions continues.

Procédés d'intégration numérique. Equations différentielles ordinaires: méthode d'itération, méthode de Runge-Kutta pour des valeurs initiales. Méthode des différences pour des problèmes aux limites.

Travaux pratiques sur des machines.

9. *Cinématique et cinétique.*

Equivalence des systèmes de vecteurs: torseurs.

*Cinématique :*

Définition d'un mouvement par rapport à un repère. Compléments de cinématique du point. Exemples simples de détermination de mouvements à partir de l'accélération et des conditions initiales (mouvements à accélération centrale).

Champ des vitesses d'un solide. Changement de repère: composition des vitesses et des accélérations.

*Cinétique :*

Masse d'un système. Conservation de la masse. Centre d'inertie. Torseur des quantités de mouvement. Torseur des quantités d'accélération. Energie cinétique.

Cas du solide. Torseur d'inertie. Exemples simples de mouvements de solides.

10. *Introduction au calcul des probabilités.*

Axiomes du calcul des probabilités.

Quelques lois de probabilité à une dimension: loi binomiale, loi de Poisson, loi de Laplace-Gauss.

Espérance mathématique d'une fonction; fonction génératrice des moments. Valeurs typiques.

Lois de probabilité à deux dimensions. Méthode des moindres carrés, corrélation, régression.

*Deuxième cycle des Facultés (20 à 22 ans)*

20. *Compléments d'algèbre.*

Groupes: sous-groupes, groupes-quotients, théorème d'homomorphisme. Exemples.

Bases d'un espace vectoriel (de dimension finie ou infinie). Dualité des espaces vectoriels de dimension finie. Matrices et valeurs propres (révision).

Produit tensoriel d'espaces vectoriels; algèbre tensorielle, contraction.

Formes quadratiques et hermitiennes: loi d'inertie; réduction simultanée de deux formes dont l'une est définie positive.

Groupe orthogonal, groupe unitaire.

21. *Fonctions analytiques d'une variable complexe.*

Séries entières convergentes.

Intégrale de Cauchy.

Développements de Taylor et de Laurent. Théorème du maximum. Résidus.

Fonctions définies par des séries ou des produits infinis; exemples.

Exemples de surfaces de Riemann. Représentation conforme.

22. *Compléments de calcul intégral.*

Intégrale de Lebesgue-Stieltjès dans $R^n$ pour les fonctions numériques: énoncé (sans démonstration) des théorèmes fondamentaux.

23. *Espaces fonctionnels.*

Espaces métriques; limite, continuité. Espaces métriques complets.

Espaces vectoriels normés; espaces de Banach.

Exemples: norme de la convergence uniforme sur un espace vectoriel de fonctions numériques, normes diverses définies sur des espaces fonctionnels au moyen d'intégrales.

Théorème de Weierstrass (approximation par les polynômes).

Approximations successives pour une application strictement contractante. Application aux fonctions définies par des équations (fonctions implicites).

Espaces préhilbertiens et espaces hilbertiens: exemples. L'espace $L^2$ est complet.

24. *Equations intégrales.*

Equation de Volterra.

Equation de Fredholm: cas du noyau continu, cas qui s'y ramènent. Cas d'un noyau hermitien.

Développement en série de fonctions orthogonales.

25. *Equations différentielles ordinaires.*

Théorème d'existence et d'unicité dans le cas analytique complexe. Dépendance des paramètres.

Systèmes différentiels linéaires.

Théorème de Fuchs pour une équation linéaire du second ordre.

Théorème d'existence et d'unicité dans le cas réel. Dépendance des paramètres.

Systèmes différentiels linéaires dans le domaine réel.

Etude, sur quelques exemples, des solutions d'un système différentiel au voisinage d'un point singulier (col, nœud, foyer).

Problèmes aux limites du type Sturm-Liouville.

26. *Equations aux dérivées partielles.*

Une équation quasi-linéaire du premier ordre: problème de Cauchy, caractéristiques.

Définition des caractéristiques d'un système quasi-linéaire de deux équations du premier ordre à deux variables.

Equation de Pfaff complètement intégrable.

Equation du deuxième ordre: séparation des variables.

Equations du deuxième ordre à coefficients constants:

— Type elliptique: équation $\triangle\varphi = 0$; théorème de la moyenne, solution élémentaire; unicité pour les problèmes de Neumann et de Dirichlet; fonction de Green, formule de Poisson pour la sphère; intégrale de l'énergie (Dirichlet). Equation $\triangle\varphi + k^2\varphi = 0$: la condition de radiation; réduction à une équation intégrale.

— Type hyperbolique: équation des ondes à une, trois et deux variables d'espace; solution élémentaire, problème aux limites; formules de Poisson et de Kirchhoff. Méthode de descente. Intégrale d'énergie. solution élémentaire; problème aux limites.

— Type parabolique: équation de la chaleur à une variable d'espace;

27. *Calcul des variations.*

Equations d'Euler-Lagrange pour les intégrales simples ou multiples. Conditions aux limites naturelles. Multiplicateurs de Lagrange.

28. *Distributions, transformations de Fourier et de Laplace.*

Définition des distributions sur $R^n$. Dérivation des distributions; exemples.

Transformation de Fourier et de Laplace: introduction à la théorie. Applications aux équations aux dérivées partielles.

Exemples de développements asymptotiques.

29. *Fonctions spéciales.*

1) Fonction $\Gamma$ (z). Développements asymptotiques.
2) Un choix entre les fonctions suivantes:

— fonctions de Bessel-Hankel-Neumann; expression asymptotique, expressions intégrales.
— fonctions de Legendre, de Legendre associées, fonctions harmoniques sphériques.

3) Eventuellement, un choix parmi les fonctions suivantes:

— fonctions hypergéométriques;
— polynômes de Laguerre;
— polynômes d'Hermite;
— fonctions de Mathieu;
— fonctions elliptiques.

Institut H. Poincaré
11, rue Pierre Curie
Paris V^e