

# UNE RELATION ENTRE LA DÉRIVABILITÉ A DROITE ET LA CONTINUITÉ

Autor(en): **Busko, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-40746>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# UNE RELATION ENTRE LA DÉRIVABILITÉ À DROITE ET LA CONTINUITÉ

par E. BUSKO

Le théorème qui va être énoncé permet de résoudre le problème suivant: appelons « primitive à droite » d'une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  à valeurs dans un espace vectoriel topologique  $E$ , toute fonction  $F$  possédant une dérivée à droite  $F'_d$  égale à  $f$  (sur  $I$ ); peut-on trouver simplement toutes les « primitives à droite » connaissant l'une d'elles?

La réponse est affirmative lorsque la topologie de  $E$  a de fortes propriétés: étant données deux « primitives à droite »  $F$  et  $G$  de  $f$ , il existe une suite d'intervalles ouverts dont la réunion est dense dans  $I$  et sur chacun desquels  $F$  et  $G$  diffèrent d'une constante.

Il peut se faire qu'aucune « primitive à droite » ne soit continue dans  $I$ . Exemple:  $I = \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \sin 1/x$  pour  $x < 0$  et  $F(x) = 0$  pour  $x \geq 0$ ; toute « primitive à droite » de  $f(x) = F'_d(x)$ , continue sur  $] -\infty, 0[$  diffère de  $F$ , sur cet intervalle, d'une constante, donc n'a pas de limite à gauche au point  $x = 0$ .

Cependant on a le

**THÉORÈME.** — *Si la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $I = [a, b[ \subset \mathbb{R}$ , à valeurs dans un espace vectoriel normé  $E$  sur  $\mathbb{R}$ , possède une dérivée à droite  $f'_d(x)$  pour tout  $x \in I$ , il existe une suite d'intervalles  $(I_n)$  (non réduits à un point), fermés à gauche, dont la réunion est dense dans  $I$  et sur chacun desquels  $f$  est continue.*

*En particulier, si  $f'_d(x) = 0$  pour tout  $x \in I$ ,  $f$  est constante sur chaque  $I_n$ .*

*Démonstration.* 1<sup>o</sup>) On va démontrer tout d'abord qu'il existe un intervalle ouvert  $\subset I$  sur lequel  $f$  est continue. Par l'absurde, supposons en effet que  $f$  ne soit continue dans aucun sous-intervalle ouvert  $\subset I$ . Il existe donc un ensemble  $D$  dense dans  $I$ , en tout point duquel  $f$  n'est pas continue. L'hypothèse entraînant la continuité à droite sur  $I$ ,  $f$  n'est pas continue à gauche pour  $x \in D$ .

Donc, pour tout  $x \in D$ , il existe  $h > 0$  tel que pour tout  $d > 0$ , l'intervalle  $]x-h/d, x[$  contienne un point  $y \in I$  pour lequel  $\|f(x) - f(y)\| > h$ , de sorte que  $\|(f(x) - f(y))/(x - y)\| > d$ . La fonction  $t \rightarrow (f(x) - f(t))/(x - t)$ , définie dans  $I$  pour  $t \neq x$ , étant continue à droite au point  $y$ , il existe  $z$  vérifiant  $y < z < x$  tel que pour  $y \leq t \leq z$ , on ait  $\|(f(x) - f(t))/(x - t)\| > d$ . Ceci étant, soit  $(d_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres réels  $> 0$  tendant vers  $+\infty$ . Fixons  $x_0 \in D$ ; il existe  $y_0 \in I$  et  $x_1 \in D$  tels que  $y_0 < x_1 < x_0$  et que, pour  $y_0 \leq t \leq x_1$ , on ait  $\|(f(x_0) - f(t))/(x_0 - t)\| > d_0$ . Puis, partant de  $x_1 \in D$ , on trouve  $y_1$  et  $x_2 \in D$  avec  $y_0 < y_1 < x_2 < x_1$  tels que pour  $y_1 \leq t \leq x_2$  on ait  $\|(f(x_1) - f(t))/(x_1 - t)\| > d_1$ , etc. On trouve ainsi par récurrence deux suites  $(x_n)_{n \geq 0}$  dans  $D$  et  $(y_n)_{n \geq 0}$  dans  $I$  telles que pour chaque entier  $n \geq 0$  on ait les inégalités  $y_n < y_{n+1} < x_{n+1} < x_n$  et l'implication

$$(y_n \leq t \leq x_{n+1}) \Rightarrow \|(f(x_n) - f(t))/(x_n - t)\| > d_n.$$

Soit  $\xi \in I$  la limite de la suite décroissante  $(x_n)$ . Pour tout  $n \geq 0$  on a  $y_n < \xi < x_{n+1}$ , donc  $\|(f(x_n) - f(\xi))/(x_n - \xi)\| > d_n$ , de sorte que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(f(x_n) - f(\xi))/(x_n - \xi)\| = +\infty$ , ce qui contredit l'hypothèse  $f'_d(\xi) \in E$ .

2°) Soit maintenant  $\rho$  la relation définie sur les couples  $(x, y)$  de  $I$  par:  $x \rho y \Leftrightarrow f$  est continue sur l'intervalle fermé d'extrémités  $x$  et  $y$ .

On a une relation d'équivalence. Chaque classe d'équivalence est un intervalle, par définition de  $\rho$ , et cet intervalle est fermé à gauche à cause de la continuité à droite. Enfin, la réunion des classes d'équivalence non réduites à un point est dense dans  $I$ , en vertu du 1°), et cette réunion est dénombrable, car toute famille d'intervalles de  $\mathfrak{R}$ , d'intérieur non vide, disjoints deux à deux, est dénombrable.

La deuxième partie du théorème résulte du théorème des accroissements finis (cf. [1], théorème 2 page 22). C.q.f.d.

*Remarque.* — Ce théorème met en défaut la conclusion de [1], exercice 2 page 27.

La question se pose de savoir si on peut généraliser ce résultat à des espaces localement convexes  $E$  (séparés) plus généraux. Il n'en est rien.

En effet, deux cas se présentent: ou bien  $E$  admet un voisinage borné, alors sa topologie d'espace localement convexe séparé peut être définie par une norme (cf. [2], ex. 2 p. 11); ou bien  $E$  n'admet aucun voisinage borné.

Mais voici un exemple de ce deuxième cas.

*Exemple.* — Soit  $E = \mathfrak{R}^{\mathfrak{N}}$ , l'ensemble des suites réelles muni de la topologie produit qui en fait un espace localement convexe séparé; cette topologie est d'ailleurs métrisable (et complète) par la distance

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

où  $(\epsilon_n)$  est une suite de nombres  $> 0$  telle que  $\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n < +\infty$  (cf. [3]).

Soit  $I = [0, 1[$  et supposons les rationnels de  $]0, 1[$  rangés en une suite  $(r_n)_{n \geq 0}$ . Définissons  $f : I \rightarrow E$  par chacune de ses coordonnées  $f_n$ :

$$\begin{aligned} f_n(t) &= 0 & \text{si } 0 \leq t < r_n, \\ f_n(t) &= 1 & \text{si } r_n \leq t < 1. \end{aligned}$$

Alors  $f$  admet une dérivée à droite nulle sur  $I$ . En effet, chacune des coordonnées  $f_n$  admet une dérivée à droite nulle pour tout  $x \in I$ . Mais  $f_n$  n'est pas continue à gauche au point  $x = r_n$ , donc  $f$  non plus: de sorte que  $f$  n'est ni continue ni constante dans aucun sous-intervalle de  $I$ .

Revenons au problème posé, dans le cas où  $E$  est normé: il suffit de trouver toutes les fonctions possédant une dérivée à droite nulle sur  $I$  en vertu de l'équivalence

$$f'_d = g'_d \text{ sur } I \Leftrightarrow (f-g)'_d = 0 \text{ sur } I.$$

Voici d'abord un exemple dans la proposition qui suit:

**PROPOSITION.** — *Pour toute suite  $(I_n)$  d'intervalles  $\subset I = [a, b[$ , disjoints deux à deux, telle que tout intervalle rencontrant deux intervalles distincts  $I_p$  et  $I_q$  contienne l'extrémité (droite) d'un intervalle  $I_n$  ouvert à droite, il existe une fonction  $f : \mathfrak{R} \rightarrow E$*

- a) *constante sur chaque  $I_n$ ;*
- b) *non constante sur la réunion de deux quelconques des  $I_n$ ;*
- c) *de dérivée à droite nulle en tout point;*
- d) *telle que l'application  $x \rightarrow \|f(x)\|$  soit croissante.*

*Démonstration.* — Il suffit de trouver une fonction  $g$  numérique  $\geq 0$  croissante vérifiant a), b) et c), car pour tout  $\alpha \in E$ ,  $\alpha \neq 0$ , la fonction  $x \rightarrow f(x) = \alpha g(x)$  vérifie a), b), c) et d).

Soit  $(J_n)_{n \in M}$ ,  $M \subset \mathfrak{R}$ , l'ensemble dénombrable des intervalles  $J_n$  ouverts à droite. On désigne par  $a_n$  l'origine de  $J_n$  et  $b_n$  son extrémité et on pose, pour  $n \in M$ ,

$$\begin{aligned} g_n(x) &= 0 && \text{lorsque } x < b_n, \\ g_n(x) &= (b_n - a_n)^2 && \text{lorsque } x \geq b_n. \end{aligned}$$

Pour tout  $x \in \mathfrak{R}$ , la série  $\sum_{n \in M} g_n(x) = \sum_{\substack{n \in M: \\ b_n \leq x}} (b_n - a_n)^2$  est convergente, car

$$\sum_{\substack{n \in M: \\ b_n \leq x}} (b_n - a_n)^2 \leq (b - a) \sum_{\substack{n \in M: \\ b_n \leq x}} (b_n - a_n) < (b - a)^2.$$

Si  $x < y$ , on a  $g_n(x) \leq g_n(y)$  pour chaque  $n \in M$ , donc  $g(x) \leq g(y)$ ; en outre s'il existe  $n \in M$  tel que  $g_n(x) < g_n(y)$ , alors  $g(x) < g(y)$ . Donc  $g$  est  $\geq 0$ , croissante, vérifie a) et b) car l'enveloppe convexe de  $I_p \cup I_q$  contient un point  $b_n$  :  $g_n$  prend sur  $I_p$  et  $I_q$  deux valeurs distinctes, donc  $g$  aussi. Reste à vérifier c). Par construction,  $g$  est constante sur tout intervalle  $[a_n, b_n[$ , donc  $g'_d(x) = 0$  pour  $x \in J = \bigcup_{n \in M} [a_n, b_n[$ . Soit  $x \notin J$ . S'il existe  $h > 0$  tel que  $[x, x + h]$  ne rencontre pas  $J$ ,  $g$  est encore constante sur  $[x, x + h]$ , par construction, donc  $g'_d(x) = 0$ ; sinon, pour  $y > x$ , on a

$$g(y) - g(x) = \sum_{\substack{n \in M: \\ x < a_n < b_n \leq y}} (b_n - a_n)^2 \leq (y - x) \sum_{\substack{n \in M: \\ x < a_n < b_n \leq y}} (b_n - a_n) \leq (y - x)^2,$$

c'est dire que  $g'_d(x) = 0$ . C.q.f.d.

Passant au cas général, soit une suite  $(I_n)$  d'intervalles  $\subset I$ , d'origine  $a_n$ , d'intérieur non vide, fermés à gauche, disjoints deux à deux, dont la réunion est dense dans  $I$ . Pour qu'une fonction constante sur chaque  $I_n$  ait une dérivée à droite nulle sur  $I$  il faut et il suffit qu'elle vérifie la condition: pour toute suite décroissante de points  $a_{n_k}$  tendant vers un point  $x$ , on a  $\lim_{k \rightarrow \infty} (f(a_{n_k}) - f(x)) / (a_{n_k} - x) = 0$ . Ceci définit toutes les fonctions possédant une dérivée à droite nulle et achève de résoudre le problème proposé.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI, Fonctions d'une variable réelle, chap. 1, 2, 3 (1958).
- [2] N. BOURBAKI, Espaces vectoriels topologiques, chap. 3, 4, 5 (1964).
- [3] S. BANACH, Théorie des opérations linéaires, Warszawa (1932).

*(Reçu le 25 novembre 1965)*

E. Busko  
Résidence Gambetta A.1  
91, Yerres (France)

**vide-leer-empty**