



Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

seur B. Segre lisait une notice rédigée par F. Tricomi, empêché de la lire lui-même. Rappelons à ce sujet qu'Hadamard était à notre connaissance membre, non seulement de ces deux sociétés et de la Royal Society d'Edimbourg, mais aussi des académies de Bruxelles, de Liège, d'Amsterdam, de Washington, de Boston, de Buenos Aires, de Rio de Janeiro, de Calcutta, et de New Delhi. Ajoutons qu'il était membre actif de toutes ces académies et sociétés, et au cours de ses nombreux voyages, s'était rendu dans toutes les villes citées ci-dessus. Le 13 janvier 1966, l'Ecole polytechnique célébrait avec un léger retard le centième anniversaire de sa naissance: Paul Lévy et Laurent Schwartz parlèrent de son œuvre mathématique, tandis que le général Mahieux, MM. Louis de Broglie, Maurice Roy (président de l'Académie des Sciences pour 1966), Paul Montel, F. Tricomi, S. Mandelbrojt et Louis Armand (président du Conseil de perfectionnement de l'Ecole polytechnique) rappelaient d'autres aspects de son activité. Le présent volume est un hommage à cette grande mémoire; ce ne sera sûrement pas le dernier; le plus bel hommage lui sera rendu par ceux qui continueront son œuvre.

## II

Hadamard s'est intéressé à presque tous les chapitres des mathématiques. On peut toutefois, dans ses travaux, distinguer quatre centres d'intérêt principaux et des questions diverses. Ces centres d'intérêt sont les fonctions analytiques ou quasi analytiques et leurs applications à l'arithmétique, les équations différentielles et leurs applications tant à la mécanique qu'à l'étude des lignes géodésiques d'une surface, les équations aux dérivées partielles et leurs applications à la physique mathématique, enfin le calcul des variations et le calcul fonctionnel. Les trois premières parties de l'œuvre d'Hadamard devant être exposées par MM. Mandelbrojt, Malliavin et Malgrange, nous n'avons à parler que de la quatrième et de quelques questions diverses.

Mentionnons d'abord un fait qui prouve bien l'étendue des connaissances d'Hadamard. Après la mort de Poincaré (juillet 1912), il rédigea en deux ou trois mois deux notices sur l'œuvre de cet illustre savant; elles parurent avant la fin de l'année, l'une dans la *Revue de métaphysique et de morale*, et aussi dans la *Revue du mois*, fondée par Emile Borel, l'autre dans les *Acta mathematica*. On sait que Poincaré avait renouvelé toutes les branches des mathématiques. Peu de savants pouvaient se vanter de bien connaître l'ensemble de cette œuvre immense. Il fallait être Hadamard

pour oser entreprendre, et mener à bien en si peu de temps, la tâche d'en exposer l'ensemble. Si nous précisons que ces notices avaient, l'une 42 pages, l'autre 85, on se rendra compte qu'il ne s'agissait pas d'exposés superficiels. D'ailleurs, pour certaines questions, notamment à propos des équations différentielles, il avait continué l'œuvre de Poincaré, et la connaissait bien. Mais les idées essentielles des autres chapitres de cette œuvre sont aussi bien mises en évidence dans ces remarquables exposés.

Dans la liste des œuvres d'Hadamard, publiée dans les *Selecta* qui lui ont été offerts pour son soixante-dixième anniversaire, on trouve encore des notices sur Maurice Lévy, l'auteur du célèbre traité de statique graphique, sur l'aspect mathématique de l'œuvre de Duhem, sur Painlevé, sur Emile Picard et sur George David Birkhoff<sup>1)</sup>. On voit, par ces notices et comptes rendus, à quel point il s'intéressait, non seulement à tous les aspects des mathématiques, mais à leurs applications tant à l'art de l'ingénieur qu'à la physique.

C'est par ses premiers travaux sur les fonctions analytiques, qui seront exposés par M. Mandelbrojt, que le génie d'Hadamard s'est révélé en 1892.

Le premier mémoire dont nous ayons à parler est celui où il détermina le module maximum d'un déterminant  $D$  d'ordre  $n$  dont tous les éléments ont leurs modules au plus égaux à un nombre positif  $C$ . Comme il y a  $n!$  termes de modules au plus égaux à  $C^n$ , celui de  $D$  est au plus  $C^n n!$ . Mais, sauf si  $n = 1$  ou  $2$ , il est impossible que tous les termes aient le même argument, et ce maximum ne saurait être atteint. Hadamard établit en 1893 que le véritable maximum est  $C^n \sqrt{n^n}$ , et précisa dans quelles conditions il peut être atteint. Il montra en particulier que, les cas  $n = 1$  et  $2$  étant encore exceptés, il ne peut être atteint par un déterminant réel que si  $n$  est multiple de 4.

Il est souvent arrivé dans l'histoire de la science qu'un théorème mathématique ait des applications que ne soupçonnait pas son inventeur. C'est ainsi que l'étude des coniques par les anciens Grecs a permis à Kepler de découvrir les lois du mouvement des planètes, et que les travaux de Ricci et Levi Civita sur le calcul différentiel absolu ont permis à Einstein de déduire les conséquences pratiques du principe de la relativité généralisée. De même le théorème d'Hadamard sur les déterminants a permis à Fred-

---

<sup>1)</sup> Cette liste n'est d'ailleurs pas complète: les notices d'Hadamard sur ses propres travaux, un important compte rendu de la thermodynamique de Gibbs et la préface à mes *Leçons d'Analyse fonctionnelle* n'y figurent pas. Nous mentionnerons plus loin d'autres omissions.

holm d'établir la convergence des séries à l'aide desquelles il a résolu sa célèbre équation intégrale.

Ce théorème n'est d'ailleurs pas sa seule contribution à l'algèbre. Un mémoire sur l'élimination le conduit à des démonstrations élémentaires de théorèmes établis par Humbert, Appell et Goursat à l'aide des fonctions fuchsiennes et abéliennes. Dans un autre mémoire, il signale une lacune dans la démonstration classique de l'impossibilité de la résolution de l'équation du cinquième degré. Deux autres mémoires portent sur les conditions de décomposition des formes. Tout cela de 1894 à 1897. Il reviendra à l'algèbre en 1911 pour rédiger, en collaboration avec M. Kûrschak, l'important chapitre de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (éd. française) consacré à la théorie des corps et domaines algébriques.

Mentionnons encore une extension des théorèmes de Paul Dubois-Reymond sur la croissance des fonctions. C'est Hadamard, et non Paul Dubois-Reymond, qui a démontré qu'on peut toujours définir une série convergente (divergente) qui converge (diverge) moins rapidement que toutes les séries d'une suite dénombrable de séries convergentes (divergentes) données, et que, si  $f(n)$  est une fonction positive et indéfiniment croissante de  $n$ , on peut toujours trouver une série divergente  $\sum u_n$  et une série convergente  $\sum v_n$  telles que  $0 < u_n < v_n f(n)$ .

Mentionnons enfin, pour en finir avec ces questions diverses, un mémoire de 1906 sur les transformations ponctuelles, où il étudie les conditions d'unicité d'une telle transformation, et un mémoire de 1910 sur l'indice de Kronecker, qui généralise cet indice, et qui en même temps, dans le cas du plan, apporte une simplification à la démonstration du théorème de Jordan d'après lequel une courbe plane fermée sans point double divise le plan en deux régions.

### III

Arrivons maintenant à un ensemble de travaux beaucoup plus important, concernant le calcul des variations et le calcul fonctionnel. On sait qu'Hadamard a donné le nom de fonctionnelle à une expression:  $U[x(t)]$  qui dépend de toutes les valeurs d'une fonction  $x(t)$  dans un intervalle (fini ou infini). Le calcul fonctionnel, au sens de Volterra et Hadamard, est l'étude de ces fonctionnelles (nous n'avons pas à parler ici de l'analyse générale, créée par M. Fréchet et E. H. Moore, et qu'on appelle souvent analyse fonctionnelle; il est regrettable que la terminologie de M. Fréchet n'ait pas été conservée). Volterra s'était d'abord placé au point de vue