I. Le cadre commun: l'algèbre locale

ÉTUDE COMPARÉE DE CERTAINS ANNEAUX COMMUTATIFS

par Jean-Pierre LAFON, Toulouse

Ceci constitue une rédaction d'un exposé fait à l'IMPA (Rio de Janeiro) le 19 septembre 1967 devant un auditoire d'analystes. Le but n'en est pas de faire des démonstrations complètes de résultats assez classiques mais de montrer qu'il n'y a pas de barrière entre une certaine forme d'algèbre et une certaine forme d'analyse.

I. LE CADRE COMMUN: L'ALGÈBRE LOCALE

Nous nous intéresserons dans la suite à quatre types d'anneaux. Il sera aisé de reconnaître pour ceux-ci la validité de résultats (légèrement) plus généraux énoncés ci-dessous. *Les anneaux sont commutatifs à élément unité.*

On rappelle qu'un anneau A est dit *local* si l'ensemble des éléments non inversibles est un idéal. Cet idéal m est alors l'unique idéal maximal de A. L'anneau quotient A/m est un corps appelé *corps résiduel* de A.

On peut munir l'anneau local A d'une *topologie linéaire* en prenant pour système fondamental de voisinages de a le système des ensembles $a + m^n$ $(n=0, 1, \ldots)$.

Cette topologie est *séparée* si et seulement si $\cap\, m^n = (0)$. Il en sera ainsi, en particulier, si l'anneau A est *noethérien*, i.e. si tout idéal de A (et, en particulier, l'idéal maximal m) a un système fini de générateurs: ceci est un théorème dû à Krull. On en déduit que si $\cap\, m^n$ est différent de (0), *l'anneau A n'est pas noethérien.*

Dans le cas général, l'anneau quotient $A/\cap\, m^n$ muni de la topologie induite, i.e. de sa topologie naturelle d'anneau local est séparé. On l'appelle *le séparé de l'anneau local A.* On peut munir cet anneau séparé d'une *métrique* définissant la topologie d'anneau local: si $\bar{a}$ et $\bar{b}$ appartiennent à ce séparé, on pose

$d(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ si $\bar{a} = \bar{b}$

$d(\bar{a}, \bar{b}) = e^{-n}$ si $\bar{a} - \bar{b}$ appartient à $m^n / \cap\, m^p$ mais n'appartient pas à $m^{n+1} / \cap\, m^p$.

On peut compléter l'espace métrique sous-jacent à $A/\cap m^n$, obtenant un espace métrique noté $\hat{A}$ qui contient $A/\cap m^n$ comme sous espace partout dense. Le fait que les applications de $(A/\cap m^n)^2$ dans $(A/\cap m^n)$ qui définissent les lois de composition dans $A/\cap m^n$ sont uniformément continues permet de les prolonger par continuité en des applications de $(\hat{A})^2$ dans $\hat{A}$ définissant des lois de composition sur $\hat{A}$. On vérifie que $\hat{A}$ est ainsi muni d'une structure d'anneau local de même corps résiduel que A. Cet anneau local est appelé le *complété séparé de l'anneau local* A.

Si l'idéal maximal m de A est de type fini, on montre que ce complété séparé est *noethérien et d'idéal maximal* $m \, . \, \hat{A}$ (idéal engendré pai m dans $\hat{A}$, i.e. $(m/\cap m^n)\, \hat{A}$.)

Si l'anneau A est noethérien (et, donc, aussi $\hat{A}$), l'anneau $\hat{A}$ est *fidèlement plat sur A :*
ceci peut se traduire sous la forme suivante peut-être plus intuitive pour un non initié: si (1) $\sum_{j=l}^{m} a_{ij} x_j = b_i$ $(i=1, \ldots, n)$ est un système d'équations linéaires à coefficients dans A, toute solution $(x_j)_j$ dans $\hat{A}^m$ est combinaison linéaire à coefficients dans $\hat{A}$ de solutions dans A^m.

II. Les exemples les plus importants

Ils sont de quatre type.

1. *Les anneaux de la géométrie algébrique classique*

On considère un corps k et n indéterminées $X_1, \ldots, X_n$. L'anneau « type » est l'anneau

$$k\,[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1, \ldots, X_n)}$$

des fractions rationnelles

$$\frac{f(X_1, \ldots, X_n)}{g\,(X_1, \ldots, X_n} \qquad \text{oú} f(X_1, \ldots, X_n) \text{ et } g\,(X_1, \ldots, X_n)$$

sont des polynômes tels que $g\,(0, \ldots, 0)$ soit non nul.

Si k est le corps des réels ou le corps des complexes (ou tout autre corps valué complet non discret ou topologique), cet anneau s'identifie à *l'anneau des germes de fonctions rationnelles au voisinage* de 0 dans k^n (muni de la topologie produit). Dans le cas général, on peut munir k^n d'une topologie moins fine que la topologie naturelle mais rendant les mêmes services.