

## II. Les exemples les plus importants

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

On peut compléter l'espace métrique sous-jacent à  $A/\cap m^n$ , obtenant un espace métrique noté  $\hat{A}$  qui contient  $A/\cap m^n$  comme sous espace partout dense. Le fait que les applications de  $(A/\cap m^n)^2$  dans  $(A/\cap m^n)$  qui définissent les lois de composition dans  $A/\cap m^n$  sont uniformément continues permet de les prolonger par continuité en des applications de  $(\hat{A})^2$  dans  $\hat{A}$  définissant des lois de composition sur  $\hat{A}$ . On vérifie que  $\hat{A}$  est ainsi muni d'une structure d'anneau local de même corps résiduel que  $A$ . Cet anneau local est appelé le *complété séparé de l'anneau local  $A$* .

Si l'idéal maximal  $m$  de  $A$  est de type fini, on montre que ce complété séparé est *noethérien et d'idéal maximal  $m \cdot \hat{A}$*  (idéal engendré par  $m$  dans  $\hat{A}$ , i.e.  $(m/\cap m^n) \hat{A}$ .)

Si l'anneau  $A$  est noethérien (et, donc, aussi  $\hat{A}$ ), l'anneau  $\hat{A}$  est *fidèlement plat sur  $A$*  :

ceci peut se traduire sous la forme suivante peut-être plus intuitive pour un non initié: si (1)  $\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = b_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) est un système d'équations linéaires à coefficients dans  $A$ , toute solution  $(x_j)_j$  dans  $\hat{A}^m$  est combinaison linéaire à coefficients dans  $\hat{A}$  de solutions dans  $A^m$ .

## II. LES EXEMPLES LES PLUS IMPORTANTS

Ils sont de quatre type.

### 1. Les anneaux de la géométrie algébrique classique

On considère un corps  $k$  et  $n$  indéterminées  $X_1, \dots, X_n$ . L'anneau « type » est l'anneau

$$k[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)}$$

des fractions rationnelles

$$\frac{f(X_1, \dots, X_n)}{g(X_1, \dots, X_n)} \quad \text{où } f(X_1, \dots, X_n) \text{ et } g(X_1, \dots, X_n)$$

sont des polynômes tels que  $g(0, \dots, 0)$  soit non nul.

Si  $k$  est le corps des réels ou le corps des complexes (ou tout autre corps valué complet non discret ou topologique), cet anneau s'identifie à *l'anneau des germes de fonctions rationnelles au voisinage de 0* dans  $k^n$  (muni de la topologie produit). Dans le cas général, on peut munir  $k^n$  d'une topologie moins fine que la topologie naturelle mais rendant les mêmes services.

Les anneaux de la géométrie algébrique classique sont les quotients de ces anneaux. Ils sont locaux de corps résiduel  $k$ .

## 2. Les anneaux de la géométrie formelle

Il s'agit ici d'un point de vue purement algébrique, aucun point de vue fonctionnel ne pouvant être développé.

L'anneau type est l'anneau  $k[[X_1, \dots, X_n]]$  des séries formelles à coefficients dans le corps  $k$  en les indéterminées  $X_1, \dots, X_n$ . C'est un anneau *local*, car une série formelle est inversible si et seulement si son terme constant est non nul, de corps résiduel  $k$ , et *complet*. On vérifie qu'il est le complété de l'anneau type précédent. Les anneaux locaux qui interviennent en géométrie formelle sont les anneaux quotients des anneaux types. Il est possible de les caractériser intrinsèquement comme les anneaux locaux complets de corps résiduel  $k$  admettant un sous-corps isomorphe à  $k$  et noethériens.

## 3. Les anneaux de la géométrie analytique

Le corps  $k$  est valué complet non discret (plus précisément tel que la valuation définisse une topologie non discrète): par exemple, le corps  $\mathbf{R}$  des réels, le corps  $\mathbf{C}$  des complexes ou le corps  $\mathbf{Q}_p$  des nombres  $p$ -adiques.

On note  $k\{\{X_1, \dots, X_n\}\}$  le sous-anneau de  $k[[X_1, \dots, X_n]]$  des séries convergentes, i.e. des séries  $\sum a_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$  pour lesquelles on peut trouver deux nombres positifs  $h$  et  $M$  tels que

$$|a_{i_1 \dots i_n}| \leq M h^{i_1 + \dots + i_n}$$

( $M$  et  $h$  dépendant de la série).

C'est aussi un anneau local de corps résiduel  $k$  et dont le complété est l'anneau  $k[[X_1, \dots, X_n]]$  des séries formelles.

Les anneaux locaux de la géométrie analytique sont les quotients d'anneaux de ce type. Ils sont appelés  *$k$ -algèbres analytiques*.

On remarque que l'anneau  $k\{\{X_1, \dots, X_n\}\}$  s'identifie à l'anneau des germes de fonctions analytiques au voisinage de 0 dans  $k^n$  (à un germe de fonction analytique on fait correspondre sa série de Taylor).

## 4. Les anneaux locaux de la géométrie différentielle

Ici le corps de base est le corps  $\mathbf{R}$  des nombres réels. On désigne (avec B. Malgrange) par  $\mathcal{E}_n$  l'anneau des germes de fonctions de classe  $C^\infty$  au voisinage de 0 de  $k^n$ . A un tel germe il est possible de faire correspondre sa

série de Taylor formelle: si  $\bar{f}$  est un tel germe, on note  $f$  une fonction de classe  $C^\infty$  dans un voisinage de 0 dans  $k^n$  représentant  $\bar{f}$  et on définit

$$\frac{\partial X_1^{i_1} \dots \partial X_n^{i_n}}{\partial^{i_1 + \dots + i_n}} \bar{f}(0)$$

comme la dérivée correspondante à l'origine de  $f$ ; la série de Taylor formelle de  $\bar{f}$  est la série

$$\sum \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_n}}{\partial X_1^{i_1} \dots \partial X_n^{i_n}} \bar{f}(0) \frac{X_1^{i_1}}{i_1!} \dots \frac{X_n^{i_n}}{i_n!}$$

Un théorème classique d'E. Borel affirme que l'homomorphisme ainsi défini de  $\mathcal{E}_n$  dans l'anneau  $k[[X_1, \dots, X_n]]$  est *surjectif*.

Comme l'anneau  $k[[X_1, \dots, X_n]]$  est complet, on voit qu'il est le séparé complété de  $\mathcal{E}_n$ .

Le noyau de l'homomorphisme surjectif  $\mathcal{E}_n \rightarrow k[[X_1, \dots, X_n]]$  est l'idéal des germes de *fonctions plates* (exemple, en une variable,  $x \rightarrow x^k e^{-1/x^2}$ ). Si  $m$  est l'idéal maximal de  $\mathcal{E}_n$ , ce noyau est, évidemment,  $\cap m^n$ . *L'anneau  $\mathcal{E}_n$  n'est donc pas noethérien.* Toutefois, l'idéal  $m$  est de *type fini* engendré par les germes des fonctions coordonnées. Les quotients des anneaux  $\mathcal{E}_n$  sont appelés *algèbres différentiables*.

### III. THÉORÈME DE PRÉPARATION:

#### WEIERSTRASS. MALGRANGE

*Cas formel.*

Une série  $f(X_1, \dots, X_n) \in k[[X_1, \dots, X_n]]$  est dite *régulière d'ordre  $s$  en  $X_n$*  si, en l'ordonnant par rapport à  $X_n$ ,  $f(X_1, \dots, X_n) = f_0(X_1, \dots, X_{n-1}) + \dots + f_{s-1}(X_1, \dots, X_{n-1}) X_n^{s-1} + f_s(X_1, \dots, X_{n-1}) X_n^s + \dots$ , les conditions suivantes sont satisfaites:

$$\begin{cases} f_0(0, \dots, 0) = \dots = f_{s-1}(0, \dots, 0) = 0 \\ f_s(0, \dots, 0) \neq 0 \end{cases}$$

Si le corps  $k$  est de caractéristique 0 ou si  $s = 1$  ceci se traduit par les conditions:

$$f(0, \dots, 0) = \dots = \frac{\partial^{s-1} f}{\partial X_n^{s-1}}(0, \dots, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^s f}{\partial X_n^s}(0, \dots, 0) \neq 0$$