IV. Un cas particulier important: Le théoreme des fonctions implicites

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Si $\bar{f}$ et $\bar{g}$ sont des éléments de $\mathscr{E}_n$ tels que $\bar{f}$ soit régulier d'ordre s par rapport à la n-ème variable, on peut trouver des éléments $\bar{q}$ et $\bar{r}$ de $\mathscr{E}_n$ tels que

$\bar{g} = \bar{q}\bar{f} + \bar{r}$

et que $\bar{r}$ soit le germe d'une fonction de classe C^∞ polynômiale par rapport à la n-ème variable.

Ce théorème est dû à *Malgrange*. Il faut indiquer que dans ce cas $\bar{q}$ et $\bar{r}$ *ne sont plus déterminés de manière unique* par les conditions ci-dessus.

Il existe d'autres formes du théorème de préparation équivalentes à cette forme classique mais présentant, en particulier, l'avantage de faire intervenir non seulement les anneaux types mais aussi leurs anneaux quotients (algèbres analytiques, algèbres différentiables). Disons un peu brièvement qu'un homomorphisme $\varphi : A \to B$ d'anneaux locaux est *quasi-fini* s'il est *local* i.e. applique l'idéal maximal de A dans celui de B, et si son prolongement $\hat{\varphi}$ aux complétés séparés $\hat{A} \to \hat{B}$ est *fini,* i.e. munit $\hat{B}$ d'une structure de $\hat{A}$-module de type fini. Une forme du théorème de préparation différentiable (resp. analytique) affirme que si A et B sont des algèbres différentiables (resp. analytiques), un homomorphisme quasi-fini est fini.

IV. Un cas particulier important: Le théoreme des fonctions implicites

Le lemme de Hensel.

Le théorème des fonctions implicites pour une équation (mais il serait facile de traiter le cas général) est un cas particulier du théorème de préparation. Soit $f(X_1, ..., X_n)$ une série formelle ou convergente régulière d'ordre 1 en X_n. Son polynôme distingué est de la forme $X_n - g(X_1, ..., X_{n-1})$ où $g(X_1, ..., X_{n-1})$ est un élément de $k[\![X_1, ..., X_{n-1}]\!]$ ou $k\{\{X_1, ..., X_{n-1}\}\}$ tel que $g(0, ..., 0) = 0$.

On peut donc substituer $g(X_1, ..., X_{n-1})$ à X_n dans $f(X_1, ..., X_n)$ obtenant l'égalité

$$f(X_1, ..., X_{n-1}, g(X_1, ..., X_{n-1})) = 0$$

D'autre part, l'hypothèse faite sur f correspond bien à celle du théorème des fonctions implicites

$$f(0, \ldots, 0) = 0 \, , \; \frac{\partial f}{\partial X_n}(0, \ldots, 0) \neq 0 \, .$$

La situation est analogue dans l'anneau $\mathscr{E}_n$, l'unicité qui n'était pas assurée dans le cas général du théorème de préparation (en raison de l'existence de racines multiples du polynôme distingué) l'étant évidemment dans ce cas particulier. — Il y a lieu de remarquer au contraire *la non validité d'un théorème des fonctions implicites dans l'anneau* $k[X_1, ..., X_n]_{(X_1, ..., X_n)}$, et donc, a fortiori, la *non validité d'un théorème de préparation.* (Si, dans le cas diffé rentiable, on a « trop » de fonctions, ce qui fait perdre l'unicité, dans le cas algébrique, on n'en a plus assez).

Par exemple, soit k un corps de caractéristique $\neq 2$ et considérons

$$f(X_1, X_2) = X_1 - 2X_2 + X_2^2$$

C'est une série formelle régulière d'ordre 1 en X_2. La série $g(X_1)$ telle que $g(0) = 0$ et $f(X_1; g(X_1)) = 0$ est $1 - (1 - X_1)^{1/2}$, étant entendu que l'on développe suivant la formule du binôme. Il est clair qu'elle n'appartient pas à l'anneau $k[X_1, X_2]_{(X_1, X_2)}$.

Lemme de Hensel.

Un anneau local A est dit hensélien si tout polynôme de la forme :

$$a_n X^n + ... + a_1 X + a_0$$

où a_0 appartient à m, idéal maximal de A, et a_1 n'appartient pas à m, a une racine dans m.

Il est clair que *les anneaux* $k[\![X_1, ..., X_n]\!]$, $k\{\{X_1, ..., X_n\}\}$ (si k est valué complet non discret), $\mathscr{E}_n$ *sont henséliens* en raison de la validité d'un théorème des fonctions implicites dans respectivement $k[\![X_1, ..., X_n, X]\!]$, $k\{\{X_1, ..., X_n, X\}\}$, $\mathscr{E}_{n+1}$.

Par contre, *l'anneau* $k[X_1, ..., X_n]_{(X_1, ..., X_n)}$ *n'est pas hensélien.*

V. *Propriétés algébriques classiques*

1. *Noethérianité.*

Il est facile de prouver à partir du fait que *l'anneau* $k[X_1, ..., X_n]$ *est noethérien* (théorème de Hilbert) qu'il en est de même de l'anneau $k[X_1,...,X_n]_{(X_1,...,X_n)}$. En fait, un idéal de ce dernier est engendré par un idéal de $k[X_1, ..., X_n]$. *L'anneau* $\mathscr{E}_n$ lui *n'est pas noethérien,* en raison de l'existence des fonctions plates, car il ne satisfait pas au théorème de Krull $\cap\, m^n = (0)$.

On déduit classiquement du théorème de préparation le fait que les anneaux $k[\![X_1, ..., X_n]\!]$ et $k\{\{X_1, ..., X_n\}\}$ (k corps valué complet non discret) sont noethériens. Voici l'idée de la preuve pour $k[\![X_1, ..., X_n]\!]$, la preuve pour $k\{\{X_1, ..., X_n\}\}$ étant analogue: Soit a un idéal de k