

# V. Propriétés algébriques classiques

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

tence de racines multiples du polynôme distingué) l'étant évidemment dans ce cas particulier. — Il y a lieu de remarquer au contraire *la non validité d'un théorème des fonctions implicites dans l'anneau*  $k[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)}$ , et donc, a fortiori, *la non validité d'un théorème de préparation*. (Si, dans le cas différentiable, on a « trop » de fonctions, ce qui fait perdre l'unicité, dans le cas algébrique, on n'en a plus assez).

Par exemple, soit  $k$  un corps de caractéristique  $\neq 2$  et considérons

$$f(X_1, X_2) = X_1 - 2X_2 + X_2^2$$

C'est une série formelle régulière d'ordre 1 en  $X_2$ . La série  $g(X_1)$  telle que  $g(0) = 0$  et  $f(X_1; g(X_1)) = 0$  est  $1 - (1 - X_1)^{1/2}$ , étant entendu que l'on développe suivant la formule du binôme. Il est clair qu'elle n'appartient pas à l'anneau  $k[X_1, X_2]_{(X_1, X_2)}$ .

*Lemme de Hensel.*

*Un anneau local*  $A$  *est dit hensélien si tout polynôme de la forme :*

$$a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$$

*où*  $a_0$  *appartient à*  $m$ , *idéal maximal de*  $A$ , *et*  $a_1$  *n'appartient pas à*  $m$ , *a une racine dans*  $m$ .

Il est clair que *les anneaux*  $k[[X_1, \dots, X_n]]$ ,  $k\{\{X_1, \dots, X_n\}\}$  (si  $k$  est valué complet non discret),  $\mathcal{O}_n$  *sont henséliens en raison de la validité d'un théorème des fonctions implicites dans respectivement*  $k[[X_1, \dots, X_n, X]]$ ,  $k\{\{X_1, \dots, X_n, X\}\}$ ,  $\mathcal{O}_{n+1}$ .

Par contre, *l'anneau*  $k[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)}$  *n'est pas hensélien.*

## V. Propriétés algébriques classiques

### 1. Noethérianité.

Il est facile de prouver à partir du fait que *l'anneau*  $k[X_1, \dots, X_n]$  *est noethérien* (théorème de Hilbert) qu'il en est de même de l'anneau  $k[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)}$ . En fait, un idéal de ce dernier est engendré par un idéal de  $k[X_1, \dots, X_n]$ . *L'anneau*  $\mathcal{O}_n$  *lui n'est pas noethérien, en raison de l'existence des fonctions plates, car il ne satisfait pas au théorème de Krull*  $\cap m^n = (0)$ .

On déduit classiquement du théorème de préparation le fait que les anneaux  $k[[X_1, \dots, X_n]]$  et  $k\{\{X_1, \dots, X_n\}\}$  ( $k$  corps valué complet non discret) sont noethériens. Voici l'idée de la preuve pour  $k[[X_1, \dots, X_n]]$ , la preuve pour  $k\{\{X_1, \dots, X_n\}\}$  étant analogue: Soit  $a$  un idéal de  $k$

$\llbracket X_1, \dots, X_n \rrbracket$ . S'il est (0), il est de type fini. Sinon, soit  $f$  un élément non nul de  $a$ . Quitte à lui appliquer un  $k$ -automorphisme de  $k \llbracket X_1, \dots, X_n \rrbracket$ , on peut le supposer régulier en  $X_n$ . Dès lors,  $k \llbracket X_1, \dots, X_n \rrbracket / (f)$  est un module de type fini sur l'anneau  $k \llbracket X_1, \dots, X_{n-1} \rrbracket / k \llbracket X_1, \dots, X_{n-1} \rrbracket \cap (f)$ . Il suffit alors de procéder par récurrence, supposant  $k \llbracket X_1, \dots, X_{n-1} \rrbracket$  noethérien. Il en va de même de l'anneau quotient  $k \llbracket X_1, \dots, X_{n-1} \rrbracket / k \llbracket X_1, \dots, X_{n-1} \rrbracket \cap (f)$  et donc du module de type fini  $k \llbracket X_1, \dots, X_n \rrbracket / (f)$ . Ceci signifie que tout sous-module est de type fini. Donc, en particulier,  $a/(f)$  est de type fini. Par conséquent, l'idéal  $a$  est de type fini. — Rappelons que tout quotient d'un anneau noethérien est noethérien. Donc, *les anneaux locaux de la géométrie algébrique, analytique, formelle sont noethériens.*

La preuve ci-dessus échoue en ce qui concerne l'anneau  $\mathcal{E}_n$  car la notion de germe plat est « intrinsèque » et si  $f$  est un tel germe, il n'est pas possible de trouver un automorphisme de  $\mathcal{E}_n$  le rendant régulier.

## 2. Factorialité.

Un anneau *intègre*  $A$  est dit *factoriel* si tout élément est, de manière unique (en un sens évident), produit d'éléments irréductibles. Cette notion ne se conserve, évidemment, pas par passage au quotient.

La factorialité bien connue (théorème de Gauss) de l'anneau  $k[X_1, \dots, X_n]$  implique celle de l'anneau  $k[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)}$ . Elle résulte aussi du fait que l'origine  $(0, \dots, 0)$  est un point simple de  $k^n$  muni de sa structure de variété algébrique.

Par contre, *l'anneau  $\mathcal{E}_n$  n'est pas factoriel*: c'est ainsi, que dans  $\mathcal{E}_1$ , le germe de la fonction plate  $x \rightarrow e^{-1/x^2}$  est divisible par le germe de  $x^n$  pour  $n$  entier  $\geq 0$  quelconque.

D'ailleurs l'anneau  $\mathcal{E}_1$  n'est *pas intègre* comme on le voit aisément en considérant les germes des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $R$  par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

*Les anneaux  $k \llbracket X_1, \dots, X_n \rrbracket$  et  $k \{ \{ X_1, \dots, X_n \} \}$  ( $k$  valué complet non discret) sont factoriels* : là, encore, la preuve se fait par récurrence sur  $n$  au moyen du théorème de préparation. Comme il s'agit d'anneaux noethériens intègres, l'existence d'une décomposition en facteurs irréductibles est assurée. Il reste à prouver l'unicité et, à cet effet, *qu'un élément irréductible*

engendre un idéal premier. Or, si  $f$  est un tel élément, on peut le supposer régulier en  $X_n$  (quitte à appliquer un automorphisme). Il suffit alors de prouver que le polynôme distingué associé engendre un idéal premier dans  $k \llbracket X_1, \dots, X_{n-1} \rrbracket [X_n]$  ou  $k \{ \{ X_1, \dots, X_{n-1} \} \} [X_n]$  mais ceci est assuré par la factorialité de  $k \llbracket X_1, \dots, X_{n-1} \rrbracket$  ou  $k \{ \{ X_1, \dots, X_{n-1} \} \}$  et donc des anneaux de polynômes en  $X_n$  sur ceux-ci.

## V. AUTRES RÉSULTATS

D'autres points de comparaison sont possibles. Citons en quelques-uns :

*Un idéal premier  $p$  de l'anneau  $k \{ \{ X_1, \dots, X_n \} \}$  le reste dans son complété  $k \llbracket X_1, \dots, X_n \rrbracket$  ( $k$  corps valué complet non discret). Nous ne le prouverons pas.*

*Il n'en est plus de même pour un idéal premier  $p$  de l'anneau  $k [X_1, \dots, X_n]$  en général. C'est ainsi que le polynôme  $X_1 X_2 - (X_1 + X_2) (X_1^2 + X_2^2)$  étant irréductible dans  $k[X_1, X_2]$  engendre un idéal premier dans  $k [X_1, X_2]_{(X_1, X_2)}$ . Mais, il se décompose dans l'anneau  $k \llbracket X_1, X_2 \rrbracket$  en  $(X_1 + r(X_1, X_2)) (X_2 + s(X_1, X_2))$  où  $r$  et  $s$  sont des séries formelles d'ordre supérieur à 2 et il engendre donc un idéal qui n'est plus premier dans  $k \llbracket X_1, X_2 \rrbracket$  mais qui est intersection de deux idéaux premiers, correspondants aux deux branches formelles (ou analytiques) de la courbe algébrique d'équation  $X_1 X_2 - (X_1 + X_2) (X_1^2 + X_2^2) = 0$  (« strophoïde »).*

Une étude plus générale de ce genre de situation est faite par M. Nagata sous la rubrique: Weierstrassean Rings (Local Rings. Interscience Publishers; 1962).

Le problème correspondant dans  $\mathcal{E}_n$  consiste à passer au quotient par l'idéal des germes de fonctions plates. Dans ce passage, un idéal premier donne un idéal premier du (complété) séparé.

On pourrait aussi étudier des théorèmes de cohérence du type théorème de cohérence d'Oka dans la catégorie des espaces analytiques.

Signalons pour finir *un joli résultat dû à A'Campo* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 46, 1967, pp. 279-298) parmi d'autres résultats du même auteur.

On considère une  $n$ -suite  $(M_{i_1 \dots i_n})$  de nombres réels positifs et le sous-ensemble de  $\mathbf{R} \llbracket X_1, \dots, X_n \rrbracket$  des séries  $\sum a_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$  pour lesquelles on peut trouver un nombre réel positif  $h$  tel que

$$| a_{i_1 \dots i_n} | < h^{i_1 + \dots + i_n} M_{i_1 \dots i_n}$$