# UNE CARACTÉRISATION DES COUPLES HENSELIENS

# UNE CARACTÉRISATION DES COUPLES HENSELIENS

par E. CRÉPEAUX

De façon sommaire, dire que l'anneau local d'un point $t_0$ d'une variété algébrique $V$ est hensélien signifie que le théorème des fonctions implicites est vérifié en $t_0$ pour les relations algébriques $f(x, t) = 0$ où $t \in V$ et où $x$ est la fonction inconnue à définir sur $V$, autrement dit si les relations $f(x_0, t_0) = 0$ et $f'_x(x_0, t_0)$ inversible permettent de définir une fonction $x(t)$ sur un voisinage de $t_0$ vérifiant la relation donnée et telle que $x(t_0) = x_0$.

Dans ce travail, nous étendons cette définition locale de Nagata [1], en adaptant légèrement celle de Lafon [2] au cas où l'on remplace un point par une partie fermée $F$ de $V$. Nous nous sommes cru obligés, pour des questions techniques, d'introduire deux notions sensiblement voisines correspondant à deux façons d'envisager le théorème des fonctions implicites:

*a)* couple faiblement hensélien: on exige seulement que la relation $f(x, t) = 0$ vérifiée sur $F$ (avec bien entendu une condition d'inversibilité sur $f'_x$) définisse un germe de fonctions implicites au voisinage de $F$,

*b)* couple hensélien: on exige en outre que la fonction implicite soit unique dans tout voisinage assez petit de $F$.

## § 1. — IDENTITÉ DE RAUZY

Soient $I = \{1, ..., n\}$ et $J = \{1, ..., r\}$ pour $r \in I$. On note $i \in I$, $(\sigma, i) \to i^\sigma$ l'opération du groupe $\mathcal{G}$ des permutations de $I$. Soit $\mathcal{H}$ le sous-groupe de $\mathcal{G}$ des permutations laissant $J$ globalement invariant; le sous-groupe $\mathcal{H}^\sigma = \sigma \mathcal{H} \sigma^{-1}$ laisse alors $J^\sigma$ globalement invariant. Soit $\mathcal{S}$ un système de représentants de $\mathcal{G}$ modulo la relation d'équivalence $''J^\sigma = J^{\sigma'}''$ $(\sigma, \sigma' \in \mathcal{G})$ $\mathcal{S}$ a alors $\binom{n}{r}$ éléments correspondant aux parties de $r$ éléments de $I$; on suppose que $\mathcal{S}$ contient l'élément neutre de $\mathcal{G}$, correspondant à $J$.

Soient $A$ un anneau factoriel, $X_1, ..., X_n, X, V$ des indéterminées.

On pose:

$$F(X) = \prod_{i \in I} (X - X_i) = X^n - S_1 X^{n-1} + ... + (-1)^n S_n .$$

On fait opérer $\mathcal{G}$ sur ces indéterminées par $(X_i)^\sigma = X_{i^\sigma}$, $X^\sigma = X$, $V^\sigma = V$, $\forall\ \sigma \in \mathcal{G}$. On pose $A_2 = A\,[X_1, \dots, X_n]$. Les points fixes de $A_2$ par $\mathcal{G}$ forment le sous-anneau $A_0 = A\,[S_1, \dots, S_n]$ des polynômes symétriques en $X_1, \dots, X_n$.

Posons:

$$G(X) = \prod_{i \in J} (X - X_i) = X^r - T_1 X^{r-1} + \dots + (-1)^r T_r$$

$$H(X) = \prod_{i \in I - J} (X - X_i) = X^{n-r} - U_1 X^{n-r-1} + \dots + (-1)^{n-r} U_{n-r}.$$

Le sous-anneau de $A_2$ formé des points fixes par $\mathcal{H}$ est

$$A_1 = A_0[T_1, \dots, T_r] = A_0[U_1, \dots, U_{n-r}].$$

et le sous-anneau des points fixes par $\mathcal{H}^\sigma$ est donc

$$A_1^\sigma = A_0[T_1^\sigma, \dots, T_r^\sigma] = A_0[U_1^\sigma, \dots, U_{n-r}^\sigma].$$

On remarque:

$$G^\sigma(X) = \prod_{i \in J^\sigma} (X - X_i) = X^r - T_1^\sigma X^{r-1} + \dots + (-1)^r T_r^\sigma$$

$$H^\sigma(X) = \prod_{i \in I - J} \sigma(X - X_i) = X^{n-r} - U_1^\sigma X^{n-r-1} + \dots + (-1)^{n-r} U_{n-r}^\sigma.$$

On a, $\forall\ \sigma \in \mathcal{G}$, $G^\sigma(X)\, H^\sigma(X) = F(X)$.

Soit $E$ un élément de $A_1$. Le polynôme $P(V) = \prod_{\sigma \in \mathcal{S}} (V - E^\sigma)$ a ses coefficients dans $A_0$. Posons

$$B_i(V) = P(V) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \frac{T_i^\sigma}{V - E^\sigma} \qquad C_i(V) = P(V) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \frac{T_i^\sigma}{V - E^\sigma}$$

$$Q(X, V) = P(V) \sum_{\substack{\sigma,\, \tau \in \mathcal{S} \\ \sigma \neq \tau}} \frac{F(X) - G^\sigma(X)\, H^\sigma(X)}{(V - E^\sigma)(V - E^\tau)}.$$

Ces polynômes sont à coefficients dans $A_0$ ; les polynômes $B_i(V)$, $C_i(V)$ sont de degré $\binom{n}{r} - 1$ et sont caractérisés par $B_i(E^\sigma) = P'(E^\sigma)\, T_i$, $C_i(E^\sigma) = P'(E^\sigma)\, U_i^\sigma$ où $\sigma$ parcourt les $\binom{n}{r}$ éléments de $\mathcal{S}$.

La formule d'interpolation de Lagrange entraîne:

$$P'(V) X^r - B_1(V) X^{r-1} + \dots + (-1)^r B_r(V) = P(V) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \frac{G^\sigma(X)}{V - E^\sigma}$$

$$P'(V) X^{n-r} - C_1(V) X^{n-r-1} + \dots + (-1)^{n-r} C_r(V) = P(V) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \frac{H^\sigma\ (X)}{V - E^\sigma}.$$

En effet, dans chacune de ces deux lignes, les deux membres, qui sont des polynômes de degré $\binom{n}{r} - 1$ en $V$ sur $A_0[X]$ prennent la même valeur quand on substitue à $V$ les $\binom{n}{r}$ valeurs $E^\sigma$, où $\sigma \in \mathscr{S}$.

Un petit calcul conduit à l'identité:

(1) $P'^2(V)F(X) =$

$$= [P'(V)X^r + \ldots + (-1)^r B_r(V)][P'(V)X^{n-r} + \ldots + (-1)^{n-r} C_{n-r}(V)] +$$
$$+ P(V)Q(V, X).$$

Remarquons enfin que le résultant de $G(X)$ et $H(X)$ divise $P'(E)$ dans l'anneau $A_1$ car $P'(E) = \prod_{\sigma \neq 1} (E - E^\sigma)$ « s'annule si $G(X)$ et $H(X)$ ont une racine commune ».

Comme tout anneau est quotient d'un anneau factoriel, *les identités ci-dessus sont valables si l'on remplace* A *par un anneau commutatif à élément unité quelconque.*

## § 2. — Caractérisation des couples henseliens

Soit $A$ un anneau commutatif unitaire, $\mathscr{A}$ un idéal de $A$, $\bar{A} = A/\mathscr{A}$ l'anneau quotient. On note $\bar{a}$ l'image ou « reste » dans $\bar{A}$ de l'élément $a$ de $A$, $\bar{f}$ l'image du polynôme $f$ à coefficients de $A$, que nous appellerons le reste de $f$.

Si $\phi \in A$, on note $A_\phi$ l'anneau de fractions relatif à la partie multiplicative des puissances positives de $\phi$; on notera $a_\phi$ (resp. $f_\phi$) l'image dans $A_\phi$ de l'élément $a \in A$ (resp. du polynôme $f$ sur $A$).

Si, de plus, $\phi$ est inversible modulo $\mathscr{A}$, on a un diagramme commutatif canonique:

$$\begin{array}{ccc} & & A_\varnothing \\ & \nearrow & \downarrow \\ A & & \\ & \searrow & \bar{A} \end{array}$$

qui permet de parler du reste d'un élément de $A_\phi$ ou d'un polynôme à coefficients dans $A_\phi$.

*Proposition 1.* — Les conditions suivantes sur le couple $(A, \mathscr{A})$ sont équivalentes:

(i) Si $f$ est un polynôme unitaire de $A[X]$ dont le reste se décompose en le produit de deux polynômes unitaires $\bar{g}$ et $\bar{h}$ de résultant inversible, il existe $\phi \in A$, de reste inversible, deux polynômes unitaires $g$ et $h \in A_\phi[X]$, de restes respectifs $\bar{g}$ et $\bar{h}$, de résultant inversible tel que $f_\phi = gh$.

(ii) Si $p(V) = V^k - a_1 V^{k-1} - \ldots - a_k$ est un polynôme de $A[V]$ tel que $a_2, \ldots, a_k$ appartiennent à $\mathscr{A}$ et que $\bar{a}_1$ soit inversible, il existe $\phi \in A$ de reste inversible, et un élément $a \in A_\phi$, de reste $\bar{a}_1$, racine simple de $p(V)$ [i.e. $p_\phi(a) = 0$, $p'_\phi(a)$ inversible].

(iii) Si $p(V)$ est un polynôme unitaire de $A[V]$ dont le reste a une racine simple $\bar{e}$, il existe $\phi \in A$, de reste inversible, et une racine simple $e$, de $p_\phi(V)$ dans $A_\phi$, de reste $\bar{e}$.

(iv) Si $q(U) = U^k - b_1 U^{k-1} - \ldots - b_k$ est un polynôme de $A[U]$ tel que $b_k \in \mathscr{A}$ et que $\bar{b}_{k-1}$ soit inversible, alors il existe $\phi \in A$, de reste inversible et un élément $d \in A_\phi$, de reste nul, racine simple de $q_\phi(U)$.

*Démonstration.* — Il est clair que (iii) entraîne (ii) et que (i) entraîne (iv). D'autre part, en opérant une translation sur $U$, on voit que (iv) entraîne (iii).

Montrons que (ii) entraîne (i).

Soit $f = X^n - s_1 X^{n-1} + \ldots + (-1)^n s_n$ le polynôme donné. Soit $h_1 \in A[X]$ de reste $\bar{h}$. On pose $E = h_1(X_1) \ldots h_1(X_n)$. On en déduit, avec les notations du § 1, les polynômes $P(V)$, $B_i(V)$, $C_i(V)$, $Q(V, X)$. Par l'homomorphisme de $A$ sur $\bar{A}$, ces polynômes sont transformés en $\bar{E}$, $\bar{P}$, $\bar{B}_i$, $\bar{C}_i$, $\bar{Q}$. D'autre part, spécialisant $S_i$ en $s_i$ $(i \in I)$ on obtient, avec des notations évidentes $p(V)$, $b_i(V)$, $e_i(V)$, $q(V, X)$ qui, d'après le § 1, vérifient:

$$p'^2(V) f =$$

$$= [p'(V) X^r + \ldots + (-1)^r b_r(V)] [p'(V) X^{n-r} + \ldots + (-1)^{n-r} c_{n-r}(V)] \, .$$

$$+ p(V) q(V, X) \, .$$

Pour calculer le reste de $p(V)$, on introduit un anneau $\bar{B}$ contenant $\bar{A}$ et des $x_i$ $(i \in I)$ tels que $\bar{g}(X) = \prod_{i \in J} (X - \bar{x}_i)$, $\bar{h}(X) = \prod_{i \in I - J} (X - \bar{x}_i)$. La substitution $X_i \to \bar{x}_i$ transforme $\bar{E}$ en le résultant inversible $\bar{e} = \bar{h}(\bar{x}_1) \ldots \bar{h}(\bar{x}_r)$ de $\bar{g}$ et $\bar{h}$, et, comme, pour $\sigma \neq 1$, $\bar{E}^\sigma$ est transformé en 0, on aura $\bar{p}(V) = V^{k-1}(V - \bar{e})$, où $k = \binom{n}{r}$.

Il existe, d'après (ii), un élément $\phi \in A$, de reste inversible, et un élément $e \in A_\phi$, de reste $\bar{e}$ tel que $p_\phi(e) = 0$ et que $p'_\phi(e)$ soit inversible. On a donc la décomposition dans $A$:

$$f = \left[X^r - \frac{b_{1,\phi}(e)}{p'_\phi(e)} X^{r-1} + \ldots + (-1)^r \frac{b_{r,\phi}(e)}{p'_\phi(e)}\right] \cdot \tag{2}$$
$$\cdot \left[X^{n-r} - \frac{c_{1,\phi}(e)}{p'_\phi(e)} X^{n-r-1} + \ldots + (-1)^{n-r} \frac{c_{n-r,\phi}(e)}{p'_\phi(e)}\right].$$

Pour voir que les polynômes entre crochets ont, pour restes, $\bar{g}$ et $\bar{h}$, il suffit d'utiliser le fait que $\bar{B}_i(\bar{E}) = \bar{P}'(\bar{E})\, T_i$, $\bar{C}_i(\bar{E}) = \bar{P}'(\bar{E})\, U_i$ et la substitution $X_i \to \bar{x}_i$. La remarque faite en fin du § 1 entraîne que le résultant de ces deux polynômes est inversible.

*Proposition 2.* — Les conditions suivantes sur le couple $(A, \mathscr{A})$ sont équivalentes:

(i) Si $f$ est un polynôme unitaire de $A[X]$ dont le reste se décompose en le produit de deux polynômes unitaires $\bar{g}$ et $\bar{h}$ de résultant inversible, il existe $\phi \in A$ de reste inversible possédant la propriété suivante: il existe un couple de polynômes $g, h \in A_\phi[X]$ de restes respectifs $\bar{g}$ et $\bar{h}$, tel que $f_\phi = gh$. Le couple $(g, h)$ est unique sous ces conditions et le résultant de $g$ et $h$ est inversible.

(ii) Si $p(V) = V^k - a_1 V^{k-1} - \ldots - a_k$ est un polynôme de $A[V]$ tel que $a_2, \ldots, a_k$ appartiennent à $\mathscr{A}$ et que $\bar{a}_1$ soit inversible, il existe un élément $\phi \in A$ de reste inversible possédant la propriété suivante: $p_\phi$ a dans $A$ une racine de reste $\bar{a}$, unique sous ces conditions et simple.

(iii) Si $p(V)$ est un polynôme unitaire de $A[V]$ dont le reste a une racine simple $\bar{e}$, il existe $\phi \in A$ de reste inversible possédant la propriété suivante: $p_\phi$ a, dans $A_\phi$, une racine de reste $\bar{e}$, unique sous ces conditions et simple.

(iv) Si $q(U) = U^k - b_1 U^{k-1} - \ldots - b_k$ est un polynôme de $A[U]$ tel que $b_k$ appartienne à $\mathscr{A}$ et que $\bar{b}_{k-1}$ soit inversible, il existe $\phi \in A$, de reste inversible possédant la propriété suivante: $q_\phi$ a dans $A_\phi$ une racine de reste nul, unique sous ces conditions et simple.

*Démonstration.* — Ici encore il suffit de montrer que (ii) entraîne (i). On reprend la construction de la démonstration correspondante de la proposition 1. On part de $h_1 \in A[X]$, de reste $\bar{h}$, qui fournit le polynôme $p(V) \in A[X]$. L'élément $\phi$ de cette construction est choisi de manière à satisfaire les hypothèses (ii) ci-dessus, c'est-à-dire que $p_\phi$ a dans $A_\phi$ une racine $e$ de reste $\bar{e}$, unique sous ces conditions, et simple.

Soit alors $f = gh$ une autre décomposition avec $g$ et $h$ de restes respectifs $\bar{g}$ et $\bar{h}$. On introduit un anneau $B$ contenant $A$ et des $x_i$ $(i \in I)$ tels que $g = \prod_{i \in J} (X - x_i)$, $h = \prod_{i \in I - J} (X - x_i)$. Pour calculer $p_\phi(V)$, on utilise la spécialisation $X_i \to x_i$, de sorte que l'élément $h_1(x_1) \ldots h_1(x_2)$ est racine de $p_\phi$, et comme il a pour reste $\bar{e}$, il est nécessairement égal à $e$. Compte tenu des relations $P'(V) V_i(V) = T_i$, $P'(V) C_i(V) = U_i$, on voit alors que la décomposition $f = gh$ n'est autre que celle obtenue par l'identité (2), ce qui en montre l'unicité.

*Remarque.* — Si $\phi$ possède la propriété ci-dessus, il en est de même de tout élément $\phi\theta$, où $\bar{\theta}$ est inversible.

*Définition.* — Un couple vérifiant les conditions de la proposition 1 (resp. 2) sera dit faiblement hensélien (resp. hensélien).

*Remarque.* — Nous ne gardons pas ici les définitions de J.P. Lafon mais nous allons voir ci-dessous que dans les cas usuels les notions coïncident.

## § 3. — Propriétés élémentaires

1. — Soit $(A, \mathscr{A})$ un couple tel que $\mathscr{A}$ soit contenu dans le radical (de Jacobson) ou intersection des idéaux maximaux de $A$ (il revient au même de dire qu'un élément de $A$ est inversible dès que son reste l'est. Si $(A, \mathscr{A})$ est faiblement hensélien, alors il est hensélien. On retrouve alors la définition de Lafon.

Tout d'abord les éléments $\phi$ intervenant dans les énoncés des propositions peuvent être choisis égaux à 1. Il reste à voir l'unicité de la décomposition de $f$ sous les hypothèses de (1) prop. 2. La démonstration faite dans le cas local dans [1] s'étend sans modification:

Si $f = gh = g_1 h_1$ avec $\bar{g} = \bar{g}_1$, $\bar{h} = \bar{h}_1$, $g$ et $h_1$ ont un résultant inversible puisqu'il en est de même de leur reste. Il existe alors $u, v \in A[X]$ tels que $ug + vh_1 = 1$, soit $ugh + vh_1 h = h$, d'où $(ug_1 + vh) h_1 = h$; le polynôme $h_1$ divise $h$; de même $h$ divise $h_1$; ces polynômes étant unitaires, on a $h = h_1$ et de même, $g = g_1$.

2. — Soit $(A, \mathscr{A})$ un couple et $\phi \in A$ de reste inversible; les éléments de $A_\phi$ de reste nul forment l'idéal $\mathscr{A}_\phi$ des fractions $a/\mathscr{A}_\phi{}^p$ où $a \in \mathscr{A}$, $p \in N$.

Si $(A, \mathscr{A})$ est faiblement hensélien ou hensélien, il en est de même de $(A_\phi, \mathscr{A}_\phi)$.

Supposons $(A, \mathscr{A})$ faiblement hensélien, et soit $p(V) = V^k - b_1 V^{k-1} - \ldots - b_k$ un polynôme sur $A_\phi$ où $\bar{b}_1$ est inversible et où $b_1, \ldots, b_k \in \mathscr{A}_\phi$. En prenant l'entier $m$ assez grand, on peut écrire

$$p(V) = V^k - \frac{a}{\phi^m} V^{k-1} - \ldots - \frac{a_k}{\phi^{km}}$$

où $a_1 \in A$ a un reste inversible et où $a_2, ..., a_k \in \mathscr{A}$. Supposons que $p(V)$ a une racine simple $\bar{e}$ dans $\bar{A}$, mais alors, il existe $\psi$ tel que $W^k - a_1 W^{k-1} - ... - a_k$ ait une racine simple dans $A_\psi$, de reste $\bar{e}$, et par suite, l'image de $p(V)$ dans $A_{\phi\psi}$ a une racine simple, de reste $\bar{e}$. $(A_\phi, \mathscr{A}_\phi)$ est donc faiblement hensélien. On laisse au lecteur le soin de voir que $(A_\phi, \mathscr{A}_\phi)$ est hensélien si $(A, \mathscr{A})$ l'est.

3. — On considère la catégorie (Cou) dont les objets sont les couples $(A, \mathscr{A})$ d'un anneau $A$ et d'un idéal $\mathscr{A}$ de $A$, un morphisme $u : (A, \mathscr{A}) \to (B, \mathscr{L})$ étant un homomorphisme $u: A \to B$ d'anneaux tel que $u^{-1}(\mathscr{L}) = \mathscr{A}$. On sait alors [2] que si $((A_i, \mathscr{A}_i)_{i \in I}\, u_{ij})$ est un système inductif dans (Cou) indexé par un ensemble $I$ filtrant, il a une limite inductive $(A, \mathscr{A})$ dans (Cou) où $A$ est la limite inductive des $A_i$ dans la catégorie des anneaux et où $\mathscr{A}$ est la limite inductive des idéaux $\mathscr{A}_i$. Si, de plus, les couples $(A_i, \mathscr{A}_i)$ sont faiblement henséliens, ou henséliens, il en est de même de $(A, \mathscr{A})$ [On adapte sans difficulté la démonstration de Lafon aux définitions ci-dessus].

4. — En particulier, si $(A, \mathscr{A})$ est un couple faiblement hensélien, on considère le système inductif filtrant des $(A_\phi, \mathscr{A}_\phi)$ où $\phi$ parcourt la partie multiplicative $S$ de $A$ formée des éléments inversibles modulo $\mathscr{A}$, alors sa limite inductive $(A_S, \mathscr{A}_S)$ sera faiblement hensélienne, et même hensélienne, puisque $\mathscr{A}_S$ est contenu dans le radical de $A_S$.

Cela entraîne en particulier que si $f_\phi = gh$ et $f_\psi = g_1 h_1$ sont deux décompositions d'un polynôme $f \in A[X]$ dans $A_\phi$ et $A_\psi$ respectivement et vérifiant les hypothèses de (1), prop. 1, alors, en prenant $\theta$ « assez grand » de reste inversible, ces deux décompositions ont la même image dans $A_\theta$, ce que l'on aurait pu voir directement.

En résumé, dire que $(A_S, \mathscr{A}_S)$ est hensélien équivaut à dire que $(A, \mathscr{A})$ est faiblement hensélien. On reconnaît une généralisation de [1] chap. VII prop. 43; 2). Nous rappelons que pour Nagata, un anneau local $A$, d'idéal maximal $\mathscr{M}$ est hensélien si le couple $(A, \mathscr{M})$ est faiblement hensélien au sens où nous l'entendons ci-dessus.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] NAGATA, M. *Local rings.* Interscience Publishers.
[2] LAFON, J. P. *Anneaux henséliens.* Bull. Soc. Math. France (1964).
[3] ARTIN, M. *Grothendieck Topologies.* Harvard University (1962).

E. Crépeaux
Faculté des Sciences de Lille

(Reçu le 1er juin 1968)

vide-leer-empty