§1. — Identité de rauzy

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

UNE CARACTÉRISATION DES COUPLES HENSELIENS

par E. Crépeaux

De façon sommaire, dire que l'anneau local d'un point t_0 d'une variété algébrique V est hensélien signifie que le théorème des fonctions implicites est vérifié en t_0 pour les relations algébriques $f(x, t) = 0$ où $t \in V$ et où x est la fonction inconnue à définir sur V, autrement dit si les relations $f(x_0, t_0) = 0$ et $f'_x(x_0, t_0)$ inversible permettent de définir une fonction $x(t)$ sur un voisinage de t_0 vérifiant la relation donnée et telle que $x(t_0) = x_0$.

Dans ce travail, nous étendons cette définition locale de Nagata [1], en adaptant légèrement celle de Lafon [2] au cas où l'on remplace un point par une partie fermée F de V. Nous nous sommes cru obligés, pour des questions techniques, d'introduire deux notions sensiblement voisines correspondant à deux façons d'envisager le théorème des fonctions implicites:

a) couple faiblement hensélien: on exige seulement que la relation $f(x, t) = 0$ vérifiée sur F (avec bien entendu une condition d'inversibilité sur f'_x) définisse un germe de fonctions implicites au voisinage de F,

b) couple hensélien: on exige en outre que la fonction implicite soit unique dans tout voisinage assez petit de F.

§ 1. — Identité de Rauzy

Soient $I = \{1, ..., n\}$ et $J = \{1, ..., r\}$ pour $r \in I$. On note $i \in I$, $(\sigma, i) \to i^\sigma$ l'opération du groupe $\mathcal{G}$ des permutations de I. Soit $\mathcal{H}$ le sous-groupe de $\mathcal{G}$ des permutations laissant J globalement invariant; le sous-groupe $\mathcal{H}^\sigma = \sigma\mathcal{H}\sigma^{-1}$ laisse alors J^σ globalement invariant. Soit $\mathcal{S}$ un système de représentants de $\mathcal{G}$ modulo la relation d'équivalence "$J^\sigma = J^{\sigma'}$" $(\sigma, \sigma' \in \mathcal{G})$ $\mathcal{S}$ a alors $\binom{n}{r}$ éléments correspondant aux parties de r éléments de I; on suppose que $\mathcal{S}$ contient l'élément neutre de $\mathcal{G}$, correspondant à J.

Soient A un anneau factoriel, $X_1, ..., X_n, X, V$ des indéterminées.

On pose:

$$F(X) = \prod_{i \in I} (X - X_i) = X^n - S_1 X^{n-1} + ... + (-1)^n S_n .$$

On fait opérer $\mathscr{G}$ sur ces indéterminées par $(X_i)^\sigma = X_{i^\sigma}$, $X^\sigma = X$, $V^\sigma = V$, $\forall\ \sigma \in \mathscr{G}$. On pose $A_2 = A\,[X_1, \ldots, X_n]$. Les points fixes de A_2 par $\mathscr{G}$ forment le sous-anneau $A_0 = A\,[S_1, \ldots, S_n]$ des polynômes symétriques en $X_1, \ldots, X_n$.

Posons:

$$G(X) = \prod_{i \in J} (X - X_i) = X^r - T_1 X^{r-1} + \ldots + (-1)^r T_r$$

$$H(X) = \prod_{i \in I - J} (X - X_i) = X^{n-r} - U_1 X^{n-r-1} + \ldots + (-1)^{n-r} U_{n-r}.$$

Le sous-anneau de A_2 formé des points fixes par $\mathscr{H}$ est

$$A_1 = A_0\,[T_1, \ldots, T_r] = A_0\,[U_1, \ldots, U_{n-r}].$$

et le sous-anneau des points fixes par $\mathscr{H}^\sigma$ est donc

$$A_1^\sigma = A_0\,[T_1^\sigma, \ldots, T_r^\sigma] = A_0\,[U_1^\sigma, \ldots, U_{n-r}^\sigma].$$

On remarque:

$$G^\sigma(X) = \prod_{i \in J^\sigma} (X - X_i) = X^r - T_1^\sigma X^{r-1} + \ldots + (-1)^r T_r^\sigma$$

$$H^\sigma(X) = \prod_{i \in I - J} \sigma(X - X_i) = X^{n-r} - U_1^\sigma X^{n-r-1} + \ldots + (-1)^{n-r} U_{n-r}^\sigma.$$

On a, $\forall\ \sigma \in \mathscr{G}$, $G^\sigma(X)\,H^\sigma(X) = F(X)$.

Soit E un élément de A_1. Le polynôme $P(V) = \prod_{\sigma \in \mathscr{S}} (V - E^\sigma)$ a ses coefficients dans A_0. Posons

$$B_i(V) = P(V) \sum_{\sigma \in \mathscr{S}} \frac{T_i^\sigma}{V - E^\sigma} \qquad C_i(V) = P(V) \sum_{\sigma \in \mathscr{S}} \frac{T_i^\sigma}{V - E^\sigma}$$

$$Q(X, V) = P(V) \sum_{\substack{\sigma,\, \tau \in \mathscr{S} \\ \sigma \neq \tau}} \frac{F(X) - G^\sigma(X)\,H^\sigma(X)}{(V - E^\sigma)(V - E^\tau)}.$$

Ces polynômes sont à coefficients dans A_0 ; les polynômes $B_i(V)$, $C_i(V)$ sont de degré $\binom{n}{r} - 1$ et sont caractérisés par $B_i(E^\sigma) = P'(E^\sigma)\,T_i$, $C_i(E^\sigma) = P'(E^\sigma)\,U_i^\sigma$ où σ parcourt les $\binom{n}{r}$ éléments de $\mathscr{S}$.

La formule d'interpolation de Lagrange entraîne:

$$P'(V)\,X^r - B_1(V)\,X^{r-1} + \ldots + (-1)^r B_r(V) = P(V) \sum_{\sigma \in \mathscr{S}} \frac{G^\sigma(X)}{V - E^\sigma}$$

$$P'(V)\,X^{n-r} - C_1(V)\,X^{n-r-1} + \ldots + (-1)^{n-r} C_r(V) = P(V) \sum_{\sigma \in \mathscr{S}} \frac{H^\sigma(X)}{V - E^\sigma}.$$

En effet, dans chacune de ces deux lignes, les deux membres, qui sont des polynômes de degré $\binom{n}{r} - 1$ en V sur $A_0[X]$ prennent la même valeur quand on substitue à V les $\binom{n}{r}$ valeurs E^σ, où $\sigma \in \mathscr{S}$.

Un petit calcul conduit à l'identité:

$$(1)\quad P'^2(V)F(X) =$$
$$= [P'(V)X^r + \ldots + (-1)^r B_r(V)][P'(V)X^{n-r} + \ldots + (-1)^{n-r} C_{n-r}(V)] +$$
$$+ P(V)Q(V,X).$$

Remarquons enfin que le résultant de $G(X)$ et $H(X)$ divise $P'(E)$ dans l'anneau A_1 car $P'(E) = \prod_{\sigma \neq 1} (E - E^\sigma)$ « s'annule si $G(X)$ et $H(X)$ ont une racine commune ».

Comme tout anneau est quotient d'un anneau factoriel, *les identités ci-dessus sont valables si l'on remplace* A *par un anneau commutatif à élément unité quelconque.*

§ 2. — CARACTÉRISATION DES COUPLES HENSELIENS

Soit A un anneau commutatif unitaire, $\mathscr{A}$ un idéal de A, $\bar{A} = A/\mathscr{A}$ l'anneau quotient. On note $\bar{a}$ l'image ou « reste » dans $\bar{A}$ de l'élément a de A, $\bar{f}$ l'image du polynôme f à coefficients de A, que nous appellerons le reste de f.

Si $\phi \in A$, on note A_ϕ l'anneau de fractions relatif à la partie multiplicative des puissances positives de ϕ; on notera a_ϕ (resp. f_ϕ) l'image dans A_ϕ de l'élément $a \in A$ (resp. du polynôme f sur A).

Si, de plus, ϕ est inversible modulo $\mathscr{A}$, on a un diagramme commutatif canonique:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & A_\varnothing \arrow[d] \\ A \arrow[ur] \arrow[r] & \bar{A} \end{tikzcd}$$

qui permet de parler du reste d'un élément de A_ϕ ou d'un polynôme à coefficients dans A_ϕ.

Proposition 1. — Les conditions suivantes sur le couple $(A, \mathscr{A})$ sont équivalentes:

(i) Si f est un polynôme unitaire de $A[X]$ dont le reste se décompose en le produit de deux polynômes unitaires $\bar{g}$ et $\bar{h}$ de résultant inversible, il