SUR L'EQUATION FONCTIONNELLE f(x+1) —f(x) = (x)

Autor(en): **Ardjomande, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-41553

SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE $f(x+1)-f(x) = \delta(x)$

par M. Ardjomande

On connaît de nombreux résultats concernant l'existence et l'unicité des solutions de l'équation fonctionnelle $f(x+1)-f(x) = \delta(x)$, $\delta(x)$ donnée, satisfaisant à diverses conditions parfois globales. Un exemple classique est le théorème d'Artin ou Bohr et Mollerup, qui affirme que $\lg \Gamma(x)$ est l'unique solution convexe, à une constante additive près, de l'équation

$$f(x+1) - f(x) = \lg x,\ x>0.$$

Une généralisation de ce théorème a été évidemment de remplacer $\lg x$ par une fonction $\delta(x)$, jouissant de propriétés qui permettent la construction de $f(x)$; par exemple la monotonie, la convexité, ou la convexité d'ordre $m>1$, avec dans chaque cas, une condition à la limite. Les théorèmes de M. Kuczma, ainsi que ceux de W. Krull, A. Dinghas, ou encore quelques résultats qui apparaissent dans l'article de J. Dufresnoy et Ch. Pisot, illustrent cela. Citons un des cas les plus simples:

Soit $\delta(x)$ une fonction donnée, non croissante pour $x \geqq 0$, et

$$\delta(x) \to 0 \quad (x \to \infty).$$

Alors l'équation fonctionnelle

$$f(x+1)-f(x) = \delta(x), \quad f(0) \text{ donnée,}$$

possède la solution

$$f(x) = f(0) - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - \delta(n) \right\}$$

et c'est l'unique solution non décroissante pour $x \geqq 0$.

Or, il se trouve d'une part qu'une condition *locale* est suffisante pour définir la classe où l'unicité a lieu. Par exemple, le théorème d'Artin peut s'énoncer:

L'unique solution de l'équation $f(x+1) - f(x) = \lg(x)$, $x>0$, qui satisfait à la condition

$$(1) \quad \varliminf \left\{ \frac{f(y+n)-f(n)}{y} - \frac{f(x+n)-f(n)}{x} \right\} \geqq 0,\ 0 < x < y < 2,$$

(ou à la condition

$$(2) \quad \varliminf \left\{ f(n+1)-f(n) - \frac{f(n+x)-f(n)}{x} \right\} = 0, 0 < x < 1),$$

est lg $\Gamma(x)$, à une constante additive près.

Pour le voir, d'abord il est clair que lg $\Gamma(x)$, étant convexe, satisfait à (1) et (2). Supposons que f_1 et f_2 soient deux solutions satisfaisant à la condition (1).

Soit $\varphi(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Pour $x \in]0, 1]$ on a

$$\left.\begin{array}{r} f_1(n+1) - f_1(n) - \dfrac{f_1(n+x) - f_1(n)}{x} > -\varepsilon \\ \dfrac{f_2(n+x) - f_2(n-1)}{x+1} - (f_2(n) - f_2(n-1)) > -\varepsilon \end{array}\right\} n > n_{\varepsilon,x}$$

D'où

$$\varphi(x) = \varphi(n+x) = f_1(n+x) - f_2(n+x) <$$

$$< x\{lg\, n - lg(n-1)\} + \varphi(n) + \varepsilon(2x+1) < \varepsilon(3x+1) + \varphi(1).$$

De même

$$\varphi(x) > -\varepsilon(3x+1) + \varphi(1).$$

D'où

$$f_1(x) - f_2(x) = \varphi(x) \equiv \varphi(1),\ x > 0, \text{ par périodicité.}$$

Ou encore, supposant que f_1 et f_2 sont deux solutions satisfaisant à la condition (2), pour $x \in]0, 1]$, on a

$$\left.\begin{array}{r} f_1(n+1) - f_1(n) - \dfrac{f_1(n+x) - f_1(n)}{x} > -\varepsilon \\ f_2(n+1) - f_2(n) - \dfrac{f_2(n+x) - f_2(n)}{x} < \varepsilon \end{array}\right\} \text{pour une infinité de } n$$

et en permutant les indices 1 et 2, on a ces inégalités pour une infinité de m.

D'où $\quad \varphi(x) = \varphi(n+x) < \varphi(n) + 2\varepsilon x = \varphi(1) + 2\varepsilon x$

$$\varphi(x) = \varphi(m+x) > \varphi(m) - 2\varepsilon x = \varphi(1) - 2\varepsilon x.$$

De manière analogue, dans le théorème relatif à $\delta(x)$ monotone et $\to 0$,

($x \to \infty$), cité ci-dessus, l'unicité peut s'énoncer comme suit: $f(x)$ est l'unique solution qui satisfait à la condition

$$\underline{\lim} \quad \{ f(n+y) - f(n+x) \} \geqq 0, \qquad 0 \leqq x < y \leqq 1$$

(ou à la condition

$$\underline{\lim} \quad \{ f(n+x) - f(n) \} = 0, \qquad 0 < x < 1).$$

D'autre part, la nature de l'équation fonctionnelle envisagée, la lie aux séries de Newton:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \binom{x}{k}, \quad \binom{x}{k} \overset{\text{déf}}{=} \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$$

puisqu'une « somme » de la fonction $\binom{x}{k}$ est la fonction $\binom{x}{k+1}$; et l'on vérifie immédiatement que si δ: $[a, \infty[\to \mathbf{R}$, $a \leqq 0$, est développable en série de Newton, et $f(0)$ donnée, alors l'équation

$$f(x+1) - f(x) = \delta(x), x \geqq a,$$

possède une unique solution développable en série de Newton. Il paraît donc indiqué d'envisager une classe de fonctions $\delta(x)$, qui étend celle des fonctions développables en série de Newton. Et, pour chaque $\delta(x)$ donnée, on construira une solution unique dans une classe de fonctions, qui étend, d'une deuxième manière, celle des fonctions développables en série de Newton.

Les théorèmes I, II et III préciseront ces idées. Certains résultats connus sont des conséquences du théorème I. Les théorèmes II et III traitent de types de fonctions non envisagés jusqu'ici.

Dans ce qui suit $\Delta^k \varphi(x)$ sera définie pour $k \in \{0\} \cup \mathbf{N}$ par

$$\Delta^\circ \varphi(x) = \varphi(x) \qquad \Delta \varphi(x) = \Delta^1 \varphi(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$$

$$\Delta^k \varphi(x) = \Delta\left(\Delta^{k-1} \varphi(x)\right).$$

Théorème I

Soit $\qquad \delta: D = \{0\} \cup \mathbf{N} \cup [a, \infty[\longrightarrow \mathbf{R}$

une fonction donnée. Pour que l'équation fonctionnelle

(1) $\qquad f(x+1) - f(x) = \delta(x), \; x \in D, \; f(0)$ donné,

ait une solution, il suffit qu'existe en entier $M \geqq 0$, tel que pour la suite de polynômes

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{M} \Delta^k \delta(n)\binom{x}{k},$$

la série

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \{ \delta(n+x) - p_n(x) \} = S(x),$$

converge pour $x \in [a, \infty[$. Alors la série $S(x)$ converge sur D entier, et la fonction

(3) $$f(x) = f(0) - S(x) + \sum_{k=0}^{M} \Delta^k \delta(0)\binom{x}{k+1} + S(M+1)\binom{x}{M+1}$$

qui est indépendante du degré M des polynômes, est une solution de (1), qui satisfait à la condition:

(4) $$f(n+x) - \sum_{k=0}^{m+p} \Delta^k f(n)\binom{x}{k} \to 0, \quad (n \to \infty)$$

pour tout entier $p \geqq 1$, et $x \in D$, $m = \min\{M\}$.

De plus (3) est l'unique solution de (1) qui satisfasse à (4) pour un entier $p \geqq 1$, et tout $x \in [a, a+1[$. Enfin la condition de convergence (2) est remplie si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ \delta(n+x) - P_n(x) \}$$

converge sur D, pour une suite de polynômes $P_n(x)$ quelconques, de degrés bornés.

Remarque

Un changement de variables permet d'énoncer le théorème I sous la forme suivante:

Soit δ: $[a, \infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction donnée.

Pour que l'équation fonctionnelle

(1) $$f(x+1) - f(x) = \delta(x), \quad x \in [a, \infty[, \quad f(a) \text{ donnée},$$

ait une solution, il suffit qu'existe un entier $M \geqq 0$ tel que pour

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{M} \Delta^k \delta(n+a)\binom{x-a}{k},$$

la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{\delta(n+x) - p_n(x)\} = S(x) \tag{2}$$

converge pour $x \in [a, \infty[$.

Alors la fonction

$$f(x) = f(a) - S(x) + \sum_{k=0}^{M} \Delta^k \delta(a) \binom{x-a}{k+1} + \tag{3}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^{M+1} \delta(n+a) \binom{x-a}{M+1}$$

indépendante de M, est une solution de (1), qui satisfait à la condition

$$f(n+x) - \sum_{k=0}^{m+p} \Delta^k f(n+a) \binom{x-a}{k} \longrightarrow 0, \ (n \to \infty) \tag{4}$$

pour tout entier $p \geqq 1$, $x \in [a, \infty[$, $m = \min\{M\}$.

De plus (3) est l'unique solution de (1) qui satisfasse à (4) pour un entier $p \geqq 1$, et $x \in [a, a+1[$.

Démonstration du Théorème I

On utilisera les identités

$$\Delta^j \varphi(q+x) = \sum_{k=0}^{q} \Delta^{k+j} \varphi(x) \binom{q}{k}, j, q, \text{ entiers } \geqq 0. \tag{5}$$

$$Si \ p_n(x) = \sum_{k=0}^{m} \Delta^k \varphi(n+a) \binom{x}{k}, \text{ alors} \tag{6}$$

$$p_{n+1}(x) = p_n(x+1) + \Delta^{m+1} \varphi(n+a) \binom{x}{m}; \ n, m, \text{ entiers} \geqq O.$$

Soit

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{m} \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k}.$$

La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{\delta(n+x) - p_n(x)\} = s(x)$$

converge en tout entier $q \geqq 0$. En effet, pour $0 \leqq q \leqq m$,

$$(5) \Rightarrow \delta(n+q) - p_n(q) = 0 \Rightarrow s(q) = 0$$

Et pour $q \geqq m+1$, il suffira de vérifier que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Delta^q \delta(i)$$

converge, puisque

$$\sum_{i=0}^{n} \left\{ \delta(i+q) - \sum_{k=0}^{m} \Delta^k \delta(i) \binom{q}{k} \right\} \overset{(5)}{=} \sum_{k=m+1}^{q} \left\{ \sum_{i=0}^{n} \Delta^k \delta(i) \right\} \binom{q}{k}.$$

$$\text{Or, } \sum_{i=0}^{n} \{\delta(i+x+1) - p_i(x+1)\} - \{\delta(i+x) - p_i(x)\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left\{ \delta(i+x+1) - p_{i+1}(x) - \delta(i+x) + p_i(x) + \Delta^{m+1} \delta(i) \binom{x}{m} \right\}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \Delta^{m+1} \delta(i) \binom{x}{m} + \{ \delta(n+x+1) - p_{n+1}(x) \} - \{ \delta(x) - p_0(x) \}$$

$$\overset{x \geqq a}{\Rightarrow} \sum_{i=0}^{n} \Delta^{m+1} \delta(i) \binom{x}{m} \longrightarrow s(x+1) - s(x) + \delta(x) - p_0(x), (n \to \infty).$$

D'où, par récurrence, la convergence de

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Delta^q \delta(i), \ \forall q \geqq m+1.$$

On en tire, en particulier, que

$$(7) \quad s(m+1) \binom{x}{m} = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^{m+1} \delta(n) \binom{x}{m} = \Delta s(x) + \delta(x) - p_0(x), x \geqq a$$

(8) $\quad \forall x \in D$, on a encore cette identité.

Posons

$$f(x) = f(0) - s(x) + \sum_{k=0}^{m} \Delta^k \delta(0) \binom{x}{k+1} + s(m+1) \binom{x}{m+1}, \quad x \in D.$$

Alors $f(x+1) - f(x) = \delta(x)$ (en vertu de (8)). Et si

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{m+1} \Delta^k f(n) \binom{x}{k}; \quad q_0(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{m} \Delta^k \delta(0) \binom{x}{k+1}$$

D'où

$$f(n+x) - q_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \{ \delta(i+x) - q_{i+1}(x) + q_i(x) \} + f(x) - q_0(x)$$

$$\underline{\underline{(6)}} \quad \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \delta(i+x) - p_i(x) + p_i(x) - \sum_{k=0}^{m+1} \Delta^{k+1} f(i) \binom{x}{k} \right\} + f(x) - q_0(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \{ \delta(i+x) - p_i(x) \} - \sum_{i=0}^{n-1} \Delta^{m+1} \delta(i) \binom{x}{m+1} + f(x) - q_0(x)$$

$$\longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

De plus

$$f(n+x) - \sum_{k=0}^{m+p} \Delta^k f(n) \binom{x}{k} \longrightarrow 0 \, (n \to \infty),$$

puisque pour

$$q \geqq m+2, \ \sum_{k=m+2}^{q} \Delta^k f(n) \binom{x}{k} = \sum_{k=m+1}^{q-1} \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k+1} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

En outre, si $f_M(x)$ est la forme de la solution, correspondant à une suite de polynômes de degré M,

$$f_M(x) - f(x) = f_M(x+n) - f(x+n)$$

$$= \left\{ f_M(x+n) - \sum_{k=0}^{M+1} \Delta^k f(n) \binom{x}{k} \right\} - \left\{ f(x+n) - \sum_{k=0}^{m+1} \Delta^k f(n) \binom{x}{k} \right\}$$

$$+ \sum_{m+1}^{M} \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k+1}$$

$$\longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

c'est-à-dire $f_M(x) \equiv f(x), x \in D$.

Pour voir l'unicité, soit $g(x)$, une solution sur D, avec $g(0) = f(0)$, et

$$g(n+x) - \sum_{k=0}^{m+p} \Delta^k g(n) \binom{x}{k} \longrightarrow 0 \, (n \to \infty),$$

pour $x \in [a, a+1[$, et un entier $p \geqq 1$.

Vu que $\Delta^k f(n) = \Delta^k g(n)$, $\forall k \geqq 0$, on a

$$g(x) - f(x) = g(n+x) - f(n+x) = \left\{ g(n+x) - \sum_{k=0}^{m+p} \Delta^k g(n) \binom{x}{k} \right\} -$$

$$- \left\{ f(n+x) - \sum_{k=0}^{m+p} \Delta^k f(n) \binom{x}{k} \right\}$$

$$\longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty) \qquad x \in [a, a+1[\, .$$

D'où $g(x) \equiv f(x)$ sur D, par périodicité de la différence de deux solutions. Enfin si

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{M} a_{nk}\binom{x}{k}, \quad et \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\delta(n+x) - P_n(x)\right\} = S(x)$$

converge sur D, la convergence de

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\delta(n) - a_{n0}\right\} = S(0)$$

implique la convergence de

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\delta(n+x) - \delta(n) - \sum_{k=1}^{M} a_{nk}\binom{x}{k}\right\}$$

et on achève la démonstration par récurrence.

Remarquons que certains théorèmes connus sont des conséquences du théorème I.

En ce qui concerne l'existence d'une solution, les conditions suffisantes de

1. M. Kuczma [1], J. Dufresnoy et Ch. Pisot [2]

2. W. Krull [5], M. Kuczma [6], A. Dinghas [4]

impliquent chacune la convergence de

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\delta(n+x) - p_n(x)\right\},$$

avec degré de $p_n(x) = 0, 1$ respectivement.

3. On prévoit de manière analogue, que si $\delta(x)$ est m fois dérivable' $\delta^{(m)}(x)$ non croissante pour $x \geqq 0$ (J. Dufresnoy et Ch. Pisot [2]), ou si $\delta(x)$ est concave d'ordre m au sens de *T.* Popoviciu, avec $\Delta^m \delta(x) \to 0$, $(x \to \infty)$ (M. Kuczma [8]), on aurait la convergence de

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\delta(n+x) - p_n(x)\right\}$$

avec degré de $p_n(x) = m$.

En ce qui concerne l'unicité, si une solution satisfait aux conditions d'unicité des théorèmes connus, alors elle satisfait à la condition (4) du théorème I.

Plus précisément, les conditions

1′. $g(x)$ solution non décroissante (dans un $vg(\infty)$) avec $\delta(x)$ (non croissante) $\to 0$, $(x \to \infty)$;
(J. Dufresnoy et Ch. Pisot [2], M. Kuczma [1] et [3])

2′. $g(x)$ solution convexe (dans un $vg(\infty)$), avec $\delta(x)$ (concave) satisfaisant à $\Delta\delta(n) \to 0$ $(n \to \infty)$;
(W. Krull [5], M. Kuczma [6] et [7], A. Dinghas [4])

entraînent que

$$g(n+x) - \sum_{k=0}^{m+1} \Delta^k g(n+a) \binom{x-a}{k} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

avec $m =$, 0, 1 respectivement.

Montrons que c'est le cas pour 1′. Pour 2′, cela sera analogue. Soit $x \in [a, a+1[$.

$$\underline{\lim} \left\{ g(n+x) - g(n+a) - \binom{x-a}{1} \Delta g(n+a) \right\}$$

$$= \quad \underline{\lim} \left\{ g(n+x) - g(n+a) \geqslant 0 \right.$$

$$\underline{\lim} \left\{ - g(n+x) + g(n+a) + \binom{x-a}{1} \Delta g(n+a) \right\}$$

$$= \quad \underline{\lim} \left\{ g(n+a+1) - g(n+x) - (1-x+a)\,\delta(n+a) \right\}$$

$$= \quad \underline{\lim} \left\{ g(n+a+1) - g(n+x) \right\} \geqslant 0$$

D'où la limite vaut 0 pour $x \in [a, a+1[$, et même pour tout $x \geqq a$, en écrivant $x = x' + q$, $x' \in [a, a+1[$, q entier $\geqq 0$.

3′. Encore ici, on peut prévoir que même pour $m > 1$, si $g(x)$ est une solution à dérivée m-ième non décroissante [2], ou une solution convexe d'ordre m [8], avec $\delta(x)$ satisfaisant respectivement aux conditions citées sous 3, la condition (4) du théorème I aurait lieu.

Notons qu'il peut arriver que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - \sum_{k=0}^{m} \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k} \right\}$$

diverge, pour tout entier $m \geqq 0$, et que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\delta(n+x)-\sum_{k=0}^{\infty}\Delta^k\,\delta(n)\binom{x}{k}\right\}$$

convergent; comme le montre l'exemple:

$$\delta(x) = (1+\alpha)^x\,,\ 0<\alpha<1\,.$$

Inversément la convergence de

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\delta(n+x)-p_n(x)\right\}$$

même en tout x, n'implique nullement que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta^k\,\delta(n)\binom{x}{k}$$

converge.

Avant d'énoncer le théorème II, rappelons que:

1) Si

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\binom{x}{k}\,;\ x\geqq 0$$

alors $a_k = \Delta^k\,\varphi(0)$, $\forall\ k$.

2) Si

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta^k\,\varphi(0)\binom{x}{k} = \varphi^*(x)$$

converge, $\forall\ x\geqq a$

alors

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta^k\,\varphi(n)\binom{x}{k}$$

converge et $=\varphi^*(n+x)$, $\forall\ x\geqq a$.

3) Si

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta^k\,\delta(n)\binom{x}{k}$$

converge et $\Delta f(x) = \delta(x)$

alors

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta^k f(n)\binom{x}{k}$$

converge aussi.

THÉOREME II

Soit $\delta : D = \mathbf{N} \cup \{ 0 \} \cup [a, \infty[\to \mathbf{R}$ et $f(0)$ donnés.

Supposons que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(0) \binom{x}{k} = \delta^*(x)$$

converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - \delta^*(n+x) \right\} = S(x)$$

converge, $\forall\, x \geqq a$.
Alors l'équation fonctionnelle $f(x+1) - f(x) = \delta(x)$, $x \in D$, possède une solution:

$$f(x) = f(0) - S(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(0) \binom{x}{k+1} \tag{4}$$

telle que pour $x \in D$,

$$f(n+x) - f^*(n+x) \to 0\,, \quad (n \to \infty)\,, \tag{5}$$

et (4) est l'unique solution qui satisfasse à (5), pour $x \in [a, a+1[$.

Démonstration du théorème II

Pour tout entier $m \geqq 0$, $S(m) = 0$
Pour $x \in [a, \infty[$,

$$S(x+1) - S(x) = \lim_{n \to \infty} \{ \delta(n+x) - \delta^*(n+x) \} - \tag{6}$$

$$- \delta(x) + \delta^*(x) = - \delta(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(0) \binom{x}{k}.$$

Posons

$$f(x) = f(0) - S(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(0) \binom{x}{k+1}, \quad x \in D.$$

Pour tout entier $m \geqslant 0$,

$$f(m+1) - f(m) = \sum_{k=0}^{m} \Delta^k \delta(0) \binom{m}{k} = \delta(m).$$

Et pour $x \in [a, \infty[$, $f(x+1) - f(x) = \delta(x)$, par 6).

De plus

$$f^*(x+1) - f^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta^k f(0) \binom{x}{k-1} = \delta^*(x),$$

ce qui implique:

$$f(n+x) - f^*(n+x) = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \delta(i+x) - \delta^*(i+x) \right\} + f(x) - f^*(x)$$

$$\longrightarrow S(x) + f(x) - f(0) - \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^{k+1} f(0) \binom{x}{k+1} = 0$$

Enfin, soit $g(x)$ t.q. $g(x+1) - g(x) = \delta(x), \forall\, x \in D$; $g(n+x) - g^*(n+x) \to 0, (n \to \infty), \forall\, x \in [a, a+1[$; et $g(0) = f(0)$. Vu que $g(n) = f(n), \forall\, n$ entier $\geqq 0$, et que

$$g^*(n+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k g(n) \binom{x}{k} = g(n) + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k+1}$$

$$= f(n) + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^{k+1} f(n) \binom{x}{k+1} = f^*(n+x)$$

on a, $\forall\, x \in [a, a+1[$

$$g(x) - f(x) = g(n+x) - f(n+x) = \left\{ g(n+x) - g^*(n+x) \right\}$$

$$- \left\{ f(n+x) - f^*(n+x) \right\} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

D'où $g(x) \equiv f(x)$ sur D, par périodicité de la différence de deux solutions.

Si $\delta(x)$ satisfait à la fois aux hypothèses des théorèmes I et II, pour que les solutions associées coïncident il faut et il suffit que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k+1} = 0$$

Mais la convergence de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \binom{x}{k} \right\}$$

pour une suite double (a_{nk}) n'entraîne même pas la convergence de

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(0) \binom{x}{k}$$

en général. Exemple: $\delta(x) = (-\frac{1}{2})^{[x]} + (1+\alpha)^x, 0 < \alpha < 1$, où le théorème I n'est, de plus, pas applicable.

Et même la convergence de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \binom{x}{k} \right\} = s(x)$$

avec convergence uniforme relativement à k, de la série,

$$\Delta^k s(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta^k \delta(n) - a_{nk})$$

n'entraîne pas la convergence de

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k}$$

pour tout entier $n \geqq 0$; mais seulement pour n suffisamment grand.
Exemple:

$$\delta(x) = \varphi(x) + (1+\alpha)^x, \quad 0 < \alpha < 1 \text{ , où}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, 2, 3, \ldots \\ -1 & x = 1 \end{cases}$$

$$\textit{et } |\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{x^\beta} \textit{ partout}; \beta > 1 .$$

On peut formuler des conditions suffisantes pour la convergence de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - \delta^*(n+x) \right\},$$

dont par exemple:

Soit (a_{nk}) une suite double telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \binom{x}{k} \right\} = s(x)$$

converge, $x \in [\, a, \infty \,[\cup \{0\} \cup \mathbf{N}$;
et soit

$$\left| \sum_{n=N}^{N'} \Delta^k \delta(n) - a_{nk} \right| \leqslant M_k$$

pour tout $N' \geqslant N$, et

$$\sum^{\infty} M_k \left| \binom{x}{k} \right|$$

convergente, $x \geqq a$.
Alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(0) \binom{x}{k} = \delta^*(x)$$

converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - \delta^*(n+x) \right\}$$

converge, $x \geqq a$.
En effet, on démontre par récurrence que $\forall\ m \in \mathbf{N}$, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - \sum_{k=0}^{m} \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k} - \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk} \binom{x}{k} \right\}$$

converge.
L'hypothèse implique la convergence de

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(0) \binom{x}{k} = \delta^*(x)$$

On écrit enfin,

$$\left| \sum_{n=N}^{N'} \left\{ \delta(n+x) - \delta^*(n+x) \right\} \right| \leqslant \left| \sum_{n=N}^{N'} \left\{ \delta(n+x) - \sum_{k=0}^{m} \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{m+1}^{\infty} a_{nk} \binom{x}{k} \right\} \right| + \sum_{m+1}^{\infty} \left| \sum_{N}^{N'} (\Delta^k \delta(n) - a_{nk}) \right| \left| \binom{x}{k} \right| .$$

Indépendamment, on peut énoncer le théorème suivant, dont le théorème II (pour $a=0$) est un cas particulier.

THÉOREME III

Soit $\delta : [\ 0, \infty\ [\ \rightarrow \mathbf{R}$, et $f(0)$ donnés.
Soit

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \binom{x}{k}$$

une suite de séries de Newton, telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - P_n(x) \right\} = S(x)$$

converge $x \geqq 0$; et

$$\Delta^k S(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \Delta^k \delta(n) - a_{nk} \right\}$$

converge uniformément rel. à $k = 0, 1 \ldots$ Alors l'équation fonctionnelle:

$$f(x+1) - f(x) = \delta(x)$$

possède une solution

$$f(x) = f(0) + S(0) - S(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \binom{x}{k+1},$$

où

$$\lambda_k = \Delta^{k+1} S(0) + \Delta^k \delta(0).$$

Cette solution est *indépendante* du choix de la suite $P_n(x)$, et l'unique qui satisfait à la condition

$$f(n+x) - f(n) - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} \binom{x}{k+1} \longrightarrow 0, \ (n \to \infty), \quad x \in [0, 1[,$$

où (α_{nk}) est l'une quelconque des suites doubles ci-dessus.

Démonstration du théorème III.

Soit

$$A_{nk} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{ik}, \ \ et \ \ a_{nk} - A_{n,k+1} = b_{nk}$$

On a:

$$\Delta^{k+1} S(0) = \lim_{n \to \infty} \left\{ \Delta^k \delta(n) - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,k+1} \right\} - \Delta^k \delta(0)$$

D'où

$$b_{nk} \to \Delta^{k+1} S(0) + \Delta^k \delta(0) \overset{\text{def}}{=\!=} \lambda_k, \ (n \to \infty), \tag{1}$$

uniformément en $k = 0, 1 \ldots$

D'autre part

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} \binom{x}{k},$$

donc aussi

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} \binom{x}{k+1}$$

convergent.
De ceci, de (1) et du fait que $x \geqq 0$, découle la convergence de

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \binom{x}{k+1}.$$

De plus,

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} \binom{x}{k} \to \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \binom{x}{k}, \quad (n \to \infty),$$

et

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} \binom{x}{k+1} \to \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \binom{x}{k+1}, \quad (n \to \infty).$$

Posons

$$f(x) = f(0) + S(0) - S(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \binom{x}{k+1}.$$

On vérifie que:

$$S(x+1) - S(x) = \lim_{n \to \infty} \left\{ \delta(n+x) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \binom{x}{k-1} \right\} - \delta(x)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left\{ P_n(x) - \sum_{k=0}^{\infty} A_{n,k+1} \binom{x}{k} \right\} - \delta(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} \binom{x}{k} - \delta(x).$$

D'où $f(x+1) - f(x) = \delta(x)$.
Vu que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left\{ P_i(x) - P_i(0) \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{n,k+1} \binom{x}{k+1},$$

$$f(n+x) - f(n) - \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \binom{x}{k+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \delta(i+x) - \delta(i) \right\} + f(x) - f(0) - \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \binom{x}{k+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \delta(i+x) - P_i(x) \right\} - \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \delta(i) - P_i(0) \right\} -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} \binom{x}{k+1} + f(x) - f(0)$$

$$\longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) .$$

Et si (α_{nk}) est une quelconque des suites doubles satisfaisant aux hypothèses, comme $a_{nk} - \alpha_{nk} \to 0$ $(n \to \infty)$ uniformément en k, on en déduit que

$$f(n+x) - f(n) - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} \binom{x}{k+1} \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty) .$$

Pour voir que la solution est indépendante du choix de la suite $P_n(x)$, soit $f_1(x)$ la solution associée à une autre suite. La remarque précédente entraîne que:

$$f(x) - f_1(x) = \left\{ f(n+x) - f(n) - \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \binom{x}{k+1} \right\} -$$

$$- \left\{ f_1(n+x) - f_1(n) - \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \binom{x}{k+1} \right\} \quad \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty) .$$

Donc $f = f_1$.
Pour vérifier, enfin, l'unicité, soit $g(x)$ une solution satisfaisant à

$$\left\{ g(n+x) - g(n) - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} \binom{x}{k+1} \right\} \longrightarrow 0 \ (n \to \infty) , \quad x \in [0, 1[.$$

Soit $f(x)$ la solution associée à la suite (α_{nk}) par la construction ci-dessus.

$$f(x) - g(x) = \left\{ f(n+x) - f(n) - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} \binom{x}{k+1} \right\} -$$

$$- \left\{ g(n+x) - g(n) - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} \binom{x}{k+1} \right\} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) .$$

D'où $f = g$ (par périodicité de la différence de 2 solutions).

RÉFÉRENCES

[1] KUCZMA, M., Sur une équation fonctionnelle. *Math.*, vol. 3 (26,) 1 (1961), pp. 79-87.

[2] DUFRESNOY, J. et Ch. PISOT, Sur la relation fonctionnelle $f(x+1) - f(x) = \varphi(x)$. *Bulletin de la Société mathématique de Belgique*, tome XV, fasc. 3 (1963), pp. 259-270.

[3] KUCZMA, M., Remarques sur quelques théorèmes de J. Anastassiadis. *Bulletin Sci. Math.* (2), 84 (1960), pp. 98-102.

[4] DINGHAS, A., Zur Theorie der Gammafunktion. *Math. Phys. Semesterberichte*, Band VI, Heft 3/4 (1959), pp. 245-252.

[5] KRULL, W., Bemerkungen zur Differenzengleichung $g(x+1) - g(x) = \varphi(x)$. *Math. Nachr.*, 1 (1948), pp. 365-376.

[6] KUCZMA, M., O równaniu funkcyjnym $g(x+1) - g(x) = \varphi(x)$. *Zeszyty Naukowe Uniw. Jagiell, Mat. Fiz. Chem.*, 4 (1958), pp. 27-38.

[7] —— On convex solutions of the functional equation $g[\alpha(x)] - g(x) = \varphi(x)$. *Publ. Math. Debrecen* (1959), pp. 40-47.

[8] —— Sur une équation aux différences finies et une caractérisation fonctionnelle des polynômes. *Fund. Math.*, LV (1964), pp. 77-86.

(Reçu le 15 mai 1968.)

M. Ardjomande
Institut de Mathématiques
Université de Genève
1211 Genève 4.