I. Le théorème de Riemann-Roch

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

COURBES ALGÉBRIQUES [1]

par P. Samuel

I. Le théorème de Riemann-Roch

Soient k un corps, C une courbe projective non singulière définie sur k, et $K = k(C)$ le corps des fonctions rationnelles sur C. La courbe C est déterminée, à isomorphisme près, par le corps K: si l'on veut le faisceau structural de C est le faisceau des anneaux des valuations (v_p) de K qui sont triviales sur k.

On sait que ces valuations (v_p) sont discrètes; elles correspondent aux points de C lorsque k est algébriquement clos. On appelle *diviseurs* sur C les combinaisons linéaires formelles, à coefficients dans $\mathbf{Z}$, de ces valuations, et on utilise l'écriture

$$\mathscr{A} = \sum_p n(p) \,.\, p$$

pour un tel diviseur. Ces diviseurs forment un groupe ordonné $D(C)$. A toute fonction rationnelle non-nulle sur $C, f \in k(C)^*$, on associe le diviseur

$$(f) = \sum_p v_p(f) \,.\, p\,;$$

les diviseurs ainsi obtenus, sont dits *principaux* et forment un sous-groupe $S(C)$ de $D(C)$; la relation de congruence modulo ce sous-groupe s'appelle l'équivalence linéaire; le quotient $D(C)/S(C)$ est le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(C)$, de C.

Les diviseurs de C correspondent aux *Idéaux fractionnaires* du faisceau structural O de C: les fibres de O sont les anneaux O_p des valuations v_p, et l'Idéal correspondant au diviseur $\mathscr{A} = \sum_p n(p) \,.\, p$ a pour fibre relative à O_p l'ensemble $\mathscr{A}_p$ des $x \in K$ tels que $v_p(x) \geqq -n(p)$.
Comme on sait, un tel Idéal est, en tant que Module, isomorphe au faisceau des germes de sections d'un *fibré vectoriel* de rang 1 sur C. Il est très commode de jouer sur les trois tableaux suivants:

---

[1] Exposé des Journées Mathématiques de Caen, avril 1968.

a) Diviseurs

b) Idéaux fractionnaires

c) Fibrés vectoriels de rang 1

On notera que, tandis que la correspondance entre diviseurs et Idéaux est bijective, les fibrés vectoriels associés à deux diviseurs $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont isomorphes si et seulement si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont linéairement équivalents; les fibrés vectoriels correspondent donc aux classes de diviseurs.

Etant donnée une valuation v_p de $K = k(C)$, son corps résiduel est une extension algébrique de k, de degré fini $d(p)$. Le *degré* d'un diviseur $\mathscr{A} = \sum_p n(p)\, p$ est par définition

$$d(\mathscr{A}) = \sum_p n(p)\, d(p);$$

un diviseur principal est de degré 0; ainsi $d(\mathscr{A})$ ne dépend que de la classe de $\mathscr{A}$.

Etant donné un diviseur $\mathscr{A}$, on désigne par $L(\mathscr{A})$ l'espace vectoriel des fonctions $f \in K$ telles que $(f) \geqq -\mathscr{A}$, et on note $\mathfrak{l}(\mathscr{A})$ sa dimension. Cet espace vectoriel a diverses interprétations:

a) son espace projectif associé est le *système linéaire* (au sens de la vieille géométrie algébrique) des diviseurs positifs sur C qui sont linéairement équivalents à $\mathscr{A}$;

b) Notons $I(\mathscr{A})$ le faisceau d'idéaux associé, comme ci-dessus, à $\mathscr{A}$; alors $L(\mathscr{A})$ est isomorphe à l'espace $\Gamma(C, I(\mathscr{A})) = H^0(C, I(\mathscr{A}))$ des *sections globales* de ce faisceau;

c) Enfin $L(\mathscr{A})$ s'identifie aussi à l'espace des *sections globales* du fibré vectoriel associé à $\mathscr{A}$.

Le théorème de *Riemann-Roch élémentaire* dit qu'il existe un diviseur $\mathfrak{k}$ et un entier $g \geqq 0$ tels que, pour tout diviseur $\mathscr{A}$ sur C, on ait

$$(1) \qquad l(\mathscr{A}) = d(\mathscr{A}) - g + 1 + l(\mathfrak{k} - \mathscr{A})$$

L'entier g *(le genre)* et la classe de $\mathfrak{k}$ *(la classe canonique)* sont entièrement déterminés par ces conditions. De plus, on a

$$(2) \qquad l(\mathfrak{k}) = g \qquad d(\mathfrak{k}) = 2g - 2$$

La forme *complète* de Riemann-Roch précise la nature de la classe canonique $\mathfrak{k}$, du moins lorsque $k(C)$ est extension régulière de k:

(3) *La classe canonique* $\mathfrak{k}$ *est la classe des diviseurs des différentielles de* C*; autrement dit le fibré vectoriel associé à* $\mathfrak{k}$ *est le fibré cotangent de* C (i.e. *le fibré dual du fibré tangent)*

II. Géométrie sur la surface C × C

Un bon nombre de propriétés d'une courbe C se démontrent en étudiant la surface produit $C \times C$. Sur cette surface, et plus généralement sur toute variété algébrique, on a, comme sur une courbe, les notions de diviseur, d'équivalence linéaire, et de fibré vectoriel. De plus, étant donnés deux diviseurs X et Y sur $C \times C$, sans composante commune, on définit leur *produit d'intersection* $X.Y$ (combinaison linéaire formelle des points d'intersection de X et Y, affectés de multiplicités d'intersection convenables); si X est une courbe irréductible, $X.Y$ est un diviseur sur X, dont la classe d'équivalence linéaire ne dépend que de celle de Y. Dans ce cas (X irréductible), on peut donc définir $X.Y$ comme *classe de diviseurs* sur X, même si Y admet X pour composante: on remplace Y par un diviseur Y' de même classe, n'admettant pas X pour composante, et on forme la classe (sur X) de $X.Y'$. Le degré de cette classe $X.Y$ s'appelle le nombre d'intersection de X et Y et se note $(X.Y)$.

Soit Δ la *diagonale* de $C \times C$, et soit $\mathfrak{k}_\triangle$ le diviseur sur Δ correspondant à un diviseur canonique $\mathfrak{k}$ sur C. On montre qu'on a

$$\Delta \, . \, \Delta = - \mathfrak{k}_\triangle \tag{1}$$

On en déduit

$$(\Delta . \Delta) = 2 - 2g \quad (g\text{: genre de } C) \tag{2}$$

de sorte que le nombre de self-intersection de $\triangle$ est < 0 pour $g \geqq 2$.

On considère ensuite un *morphisme séparable* π d'une courbe C sur une courbe C' (genres g et g'). Une différentielle ω sur C' détermine son diviseur (ω), son image réciproque $\pi^*\omega$ sur C, le diviseur $(\pi^*\omega)$ de celle-ci, et l'image réciproque $\pi^{-1}(\omega)$ du diviseur (ω). Par considération des anneaux de valuation des corps $k(C') \subset k(C)$, on définit, comme en arithmétique, la *différente* $\mathfrak{D}$ de π; c'est un diviseur sur C. La *formule d'Hurwitz-Zeuthen* dit qu'on a:

$$(\pi^*\omega) - \pi^{-1}(\omega) = \mathfrak{D}. \tag{3}$$