II. GÉOMÉTRIE SUR LA SURFACE CxC

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

(3) *La classe canonique* $\mathfrak{k}$ *est la classe des diviseurs des différentielles de* C*; autrement dit le fibré vectoriel associé à* $\mathfrak{k}$ *est le fibré cotangent de* C (i.e. *le fibré dual du fibré tangent)*

II. Géométrie sur la surface $C \times C$

Un bon nombre de propriétés d'une courbe C se démontrent en étudiant la surface produit $C \times C$. Sur cette surface, et plus généralement sur toute variété algébrique, on a, comme sur une courbe, les notions de diviseur, d'équivalence linéaire, et de fibré vectoriel. De plus, étant donnés deux diviseurs X et Y sur $C \times C$, sans composante commune, on définit leur *produit d'intersection* $X.Y$ (combinaison linéaire formelle des points d'intersection de X et Y, affectés de multiplicités d'intersection convenables); si X est une courbe irréductible, $X.Y$ est un diviseur sur X, dont la classe d'équivalence linéaire ne dépend que de celle de Y. Dans ce cas (X irréductible), on peut donc définir $X.Y$ comme *classe de diviseurs* sur X, même si Y admet X pour composante: on remplace Y par un diviseur Y' de même classe, n'admettant pas X pour composante, et on forme la classe (sur X) de $X.Y'$. Le degré de cette classe $X.Y$ s'appelle le nombre d'intersection de X et Y et se note $(X.Y)$.

Soit Δ la *diagonale* de $C \times C$, et soit $\mathfrak{k}_\triangle$ le diviseur sur Δ correspondant à un diviseur canonique $\mathfrak{k}$ sur C. On montre qu'on a

$$\Delta . \Delta = -\mathfrak{k}_\triangle \tag{1}$$

On en déduit

$$(\Delta.\Delta) = 2 - 2g \quad (g\text{: genre de } C) \tag{2}$$

de sorte que le nombre de self-intersection de $\triangle$ est < 0 pour $g \geqq 2$.

On considère ensuite un *morphisme séparable* π d'une courbe C sur une courbe C' (genres g et g'). Une différentielle ω sur C' détermine son diviseur (ω), son image réciproque $\pi^*\omega$ sur C, le diviseur $(\pi^*\omega)$ de celle-ci, et l'image réciproque $\pi^{-1}(\omega)$ du diviseur (ω). Par considération des anneaux de valuation des corps $k(C') \subset k(C)$, on définit, comme en arithmétique, la *différente* $\mathfrak{D}$ de π; c'est un diviseur sur C. La *formule d'Hurwitz-Zeuthen* dit qu'on a:

$$(\pi^*\omega) - \pi^{-1}(\omega) = \mathfrak{D}. \tag{3}$$

En notant $n\,(=[k(C) : k\,(C')])$ le degré de π, l'égalité des degrés des deux membres de (3) donne

$$(4) \qquad 2g - 2 = n\,(2g' - 2) + d\,(\mathfrak{D}) \geqq n\,(2g' - 2)\,.$$

Cette formule numérique a de nombreuses conséquences: par exemple $g = 0$ implique $g' = 0$ (théorème de Lüroth); aussi $g = 1$ implique $g' \leqq 1$; si π est étale (i.e. non-ramifié, i.e. si $\mathfrak{D}=0$) et si $g'=0$ (resp. $g'=1$), on a $n = 1$ et $C = C'$ (resp. $g=1$).

Un morphisme séparable $\pi : C \rightarrow C'$ est déterminé à isomorphisme près si on connaît, sur $C \times C$, le *graphe* T de la relation $\pi\,(x) = \pi\,(y)$. Ce graphe est une partie fermée (de dimension 1) de $C \times C$, qu'il est bon de considérer comme un diviseur en affectant chacune de ses composantes du coefficient 1. Réciproquement tout diviseur positif T sur $C \times C$ sans composantes multiples, qui est ensemblistement le graphe d'une relation d'équivalence, provient d'un morphisme séparable π de C sur une courbe « quotient » convenable C'. La différente de π se calcule par la formule assez naturelle:

$$(5) \qquad \mathfrak{D}_{\triangle} = \varDelta . (T - \varDelta)$$

($\mathfrak{D}_{\triangle}$: diviseur sur $\varDelta$ correspondant à la différente $\mathfrak{D}$)

On notera que $\varDelta$ est une composante de T; on pose $T = \varDelta + S$. Si le genre g' de la courbe image est $\geqq 2$, un calcul dû à F. Severi et utilisant (4) et (5) montre qu'on a:

$$(6) \qquad (S.S) < 0$$

On en déduit que S ne fait partie d'aucune famille algébrique irréductible non triviale de diviseurs positifs sur $C \times C$.

On fait alors intervenir la théorie des coordonnées de Chow (ou celle des schémas de Hilbert). Appelons *indices* d'un diviseur X sur $C \times C$ ses nombres d'intersection avec les horizontales, et avec les verticales. Les théories ci-dessus montrent que les diviseurs positifs d'indices donnés sur $C \times C$ se répartissent en un nombre fini de familles algébriques irréductibles (l'hypothèse $\dim(C) = 1$ est essentielle ici). En particulier les graphes des automorphismes de C sont les diviseurs d'indices (1,1). Pour $g \geqq 2$, l'inégalité $(\varDelta.\varDelta) < 0$ (cf (2)) montre alors:

Théorème de H.A. Schwarz et F. Klein — Si C est une courbe de genre $g \geqq 2$, le groupe Aut (C) *est fini.*

Le Schwarz partiellement responsable de ce théorème est Hermann Amandus, le complice ès inégalités de Cauchy et Buniakovski; ce n'est pas le distributeur bien connu.

De même l'inégalité (6) montre ce qui suit:

Théorème de F. Severi — Etant donnée une courbe C, les couples formés d'une courbe C' de genre $g' \geqq 2$ et d'un morphisme séparable π de C sur C' sont (à isomorphisme près) en nombre fini.

En effet la formule (4) de Hurwitz-Zeuthen montre que g' et le degré n de π ne sont susceptibles que d'un nombre fini de valeurs. On peut donc considérer que les indices $(n-1, n-1)$ de S sont donnés, et (6) montre que les diviseurs S possibles sont en nombre fini.

On peut généraliser le théorème de Severi en remplaçant, dans son énoncé, la courbe C par une variété V de dimension quelconque. Pour varier, donnons l'énoncé correspondant pour des corps.

Corollaire 1 — Soient k *un corps et* K *une extension régulière de type fini de* k. *Les corps intermédiaires* L ($k \subset \mathrm{L} \subset \mathrm{K}$) *qui sont de degré de transcendance* 1, *de genre* $\geqq 2$ *et séparablement contenus dans* K *sont en nombre fini.*

Un cas particulier est:

Corollaire 2 — (De Franchis) *— Soient* V *une variété et* D *une courbe de genre* $\geqq 2$. *Les morphismes séparables non constants de* V *dans* D *sont en nombre fini.*

Ainsi les graphes de presque tous les morphismes de V dans D sont tangents au « champ horizontal » de $V \times D$. La séparabilité est essentielle: prendre $V = D$ définie sur un corps fini $\mathbf{F}_q$ et considérer les itérés du morphisme de Frobenius $x \to x^q$ sur D.

III. La conjecture de Mordell pour les corps de Fonctions

La conjecture de Mordell est la suivante: *étant donnée une courbe* C *de genre* $\geqq 2$ *définie sur un corps de nombres algébriques* K, *l'ensemble* C_K *des points de* C *à coordonnées dans* K *est-il fini* ?

Cet énoncé reste une conjecture. Cependant D. Mumford a récemment montré que les éléments de C_K sont « assez rares »: plus précisément le nombre d'éléments de C_K dont la hauteur est au plus égale à un nombre réel donné x est de l'ordre de Log (Log x) ($x \to +\infty$) ([6]).