Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1967)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INDEX ASSOCIÉ A UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE, PÉRIODIQUE, DU SECOND ORDRE

Autor: Schmitt, Bruno V.

Kapitel: B. DÉFINITION DE L'INDEX $i(f,x^0)$

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41555

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

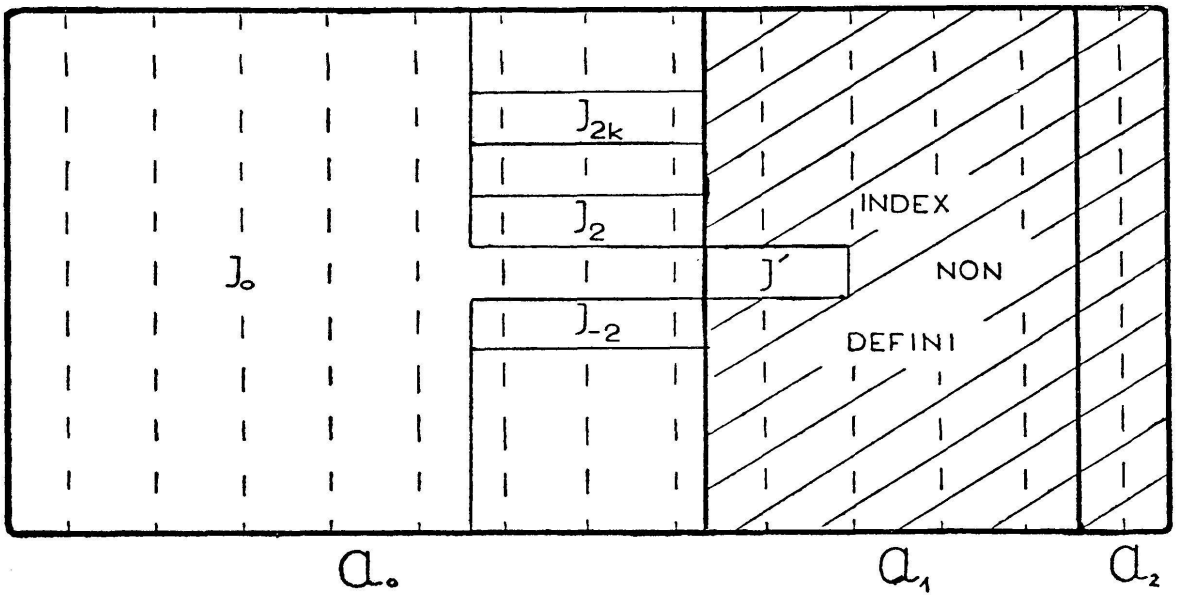
Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

2° si $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) = 0$, et si en x^0 l'index est défini, cet index est nul (III 2°) (ensemble J′ du tableau ci-dessous).

On pourra remarquer que l'index d'un système linéaire, en un point x^0 où il est défini, est dans tous les cas pair.

Ces résultats ont été détaillés dans le tableau ci-dèssous: il représente l'ensemble $\mathscr{A}$ des systèmes différentiels périodiques linéaires, d'ordre 2, décomposé en les sous-ensembles $\mathscr{A}_i$ $(i = 0, 1, 2)$ définis dans C. III. On note par $\mathscr{J}_{2k}$ l'ensemble des systèmes différentiels d'index $2k$. Les classes d'équivalence de systèmes (deux systèmes différentiels étant équivalents (C. III 4°) s'il existe un changement de variable linéaire et périodique $y = D(t)x$ permettant de transformer l'un en l'autre), ont été représentés par des tirets. On remarquera que certaines classes sont en entier dans $\mathscr{J}_0$ (cas où $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) > 0$), donc que toute transformation linéaire sur un système de cette classe laisse l'index invariant et nul. Au contraire, si une classe rencontre un $\mathscr{J}_{2k}$ $(k \neq 0)$ (cas où $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) < 0$), elle les rencontre tous: étant donné un système différentiel dans une telle classe, tout index pair peut être obtenu à l'aide d'une transformation linéaire périodique adéquate.



B. Définition de l'index $i(f, x^0)$

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2) \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2) \end{cases} \tag{3}$$

sous forme vectorielle

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{4}$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions réelles de t et x, périodiques en t, de période p. On suppose que le système (3) satisfait la condition de Lipschitz et la condition restrictive que toute trajectoire est définie pour tout t. On note par $x(t, t_0, x^0)$ la trajectoire de (3) telle que $x(t_0, t_0, x^0) = x^0$.

1. Comme $f(t, x)$ admet la période p relativement à t, on a, pour tout t:

$$x(t, t_0, x^0) = x(t+p, t_0+p, x^0). \tag{5}$$

2. On considère dans le plan des x, le point x^1, dépendant de t_0 et x^0, noté $x^1(t_0, x^0)$, défini par:

$$x^1(t_0, x^0) = x(t_0+p, t_0, x^0).$$

On obtient alors, en considérant (5):

$$x^1(t_0+p, x^0) = x^1(t_0, x^0) \qquad t_0 \in \mathbf{R}$$

il s'en suit que, pour x^0 fixé, $x^1(t_0, x^0)$ dépend périodiquement de t_0, avec la période p; le point $x^1(t_0, x^0)$ décrit donc dans le plan des x, lorsque t_0 parcourt $[o, p]$, une courbe fermée, continue (car les solutions dépendent continûment de la valeur initiale t_0); nous appelons dans la suite cette courbe *courbe des* p-*différences en* x^o du système (3) notée $c(f, x^0)$.

3. *Définition de l'index en* x^0 *:* soit x^0 un point du plan, n'appartenant pas à $c(f, x^0)$. On appelle alors *index du système (3)* en x^0, noté $i(f, x^0)$, le nombre

$$i(f, x^0) = \mathscr{V}[c(f, x^0), x^0] \in \mathbf{Z}$$

index (ou Verschlingungszahl) de $c(f, x^0)$ relativement à x^0 [2].

4. *Propriétés de l'index :*

Il y a équivalence entre les trois propositions:

« Il existe t_1 tel que $x(t, t_1, x^0)$ a la période p. »

« La courbe $c(f, x^0)$ passe par x^0. »

« Le nombre $i(f, x^0)$ n'est pas défini. »

La solution $x(t, t_0, x^0)$ dépend continûment de (t_0, x^0), ainsi que le point $x^1(t_0, x^0)$; donc la famille des courbes $c(f, x^0)$, paramétrées par t_0, dépend continûment de (t_0, x^0); et le nombre $i(f, x^0)$ est, pour f donnée,

une application continue de tout domaine ouvert où il est partout défini, dans **Z**. Il s'en suit que $i(f, x^0)$ est constant dans tout ouvert connexe du plan où il est partout défini.

Si, pour un même système différentiel, en deux points x^0 et y^0 distincts, les index sont différents l'un de l'autre, sur tout chemin continu joignant x^0 et y^0, il existe au moins un point z^0 en lequel l'index n'est pas défini, et par lequel passe donc une solution de période p.

5. *Cas d'un système autonome :* Un tel système différentiel s'écrit sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

où f est indépendant de t. Quel que soit $p > 0$, le système a la période p en t; donc $x^1(t_0, x^0)$ dépend avec la période p de t_0, donc est indépendant de t_0; $c(f, x^0)$ est réduite à un point x^1; si alors l'index est défini, donc si x^1 est distinct de x^0, on a:

$$i(f, x^0) = 0 .$$

C. Index associé a un système différentiel linéaire

Soit le système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x \tag{6}$$

où x est une matrice colonne réelle, $A(t)$ une matrice carrée réelle, d'ordre 2, continue sur **R**, de période p.

I. *Rappels et notations*

1. Les solutions sont définies pour tout t, et l'ensemble des solutions a une structure d'espace vectoriel réel de dimension 2.

2. On appelle *solution matricielle fondamentale* de (6), une matrice $X(t)$ réelle d'ordre 2, dont les deux vecteurs colonnes sont des solutions indépendantes de (6). On a alors:

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} Tr\, A(u)\, du\right). \tag{7}$$

3. Soit $X(t, t_0)$ la solution matricielle fondamentale telle que $X(t_0, t_0) = I$, matrice unité. On a alors:

$$x(t, t_0, x^0) = X(t, t_0)\, x^0 .$$