# FONCTION DE PEANO ET DIMENSION DE HAUSDORFF

# FONCTION DE PEANO ET DIMENSION DE HAUSDORFF

par J.-P. Schreiber

I. La fonction de Peano $f$ applique le segment $[0, 1]$ sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$, et satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre $\frac{1}{2}$ ; de ce fait, pour tout compact $K$ de $[0, 1]$, on a la relation suivante entre les dimensions de Hausdorff de $K$ et $f(K)$ : [1]

$$dim\,\{f(K)\} \leqslant 2\, dim\,\{K\}.$$

Montrons qu'on a en fait égalité. Il suffit de supposer $\dim\{K\} > 0$. Soit $\beta < \dim\{K\}$; il existe (Frostmann: cf. [1]) une mesure $\mu$ positive portée par $K$, telle que pour tout intervalle I de $[0, 1]$:

$$\mu(I) \leqslant C\,|I|^{\beta}.$$

La mesure image $f(\mu) = \nu$ est une mesure positive portée par $f(K)$. Montrons que, pour tout carré $J$ de $[0, 1] \times [0, 1]$ on a

$\nu(J) \leqq c' \cdot |J|^{2\beta}$ ($|J|$ est la longueur du côté de $J$).

Pour le « carré d'ordre $n$ »:

$$J = \left\{(x, y)\,; \quad \frac{p}{3^n} \leqslant x \leqslant \frac{p+1}{3^n}\,, \quad \frac{q}{3^n} \leqslant y \leqslant \frac{q+1}{3^n}\right\}$$

on a par la définition de $f$:

$$\nu(J) = \mu\{f^{-1}(J)\} \leqslant 9c'\left(\frac{1}{9^n}\right)^{\beta} = c''\,|J|^{2\beta}.$$

Un carré $J$ de côté

$$\frac{1}{3^{n+1}} \leqslant |J| < \frac{1}{3^n}$$

est recouvert par au plus quatre « carrés d'ordre $n$ »:

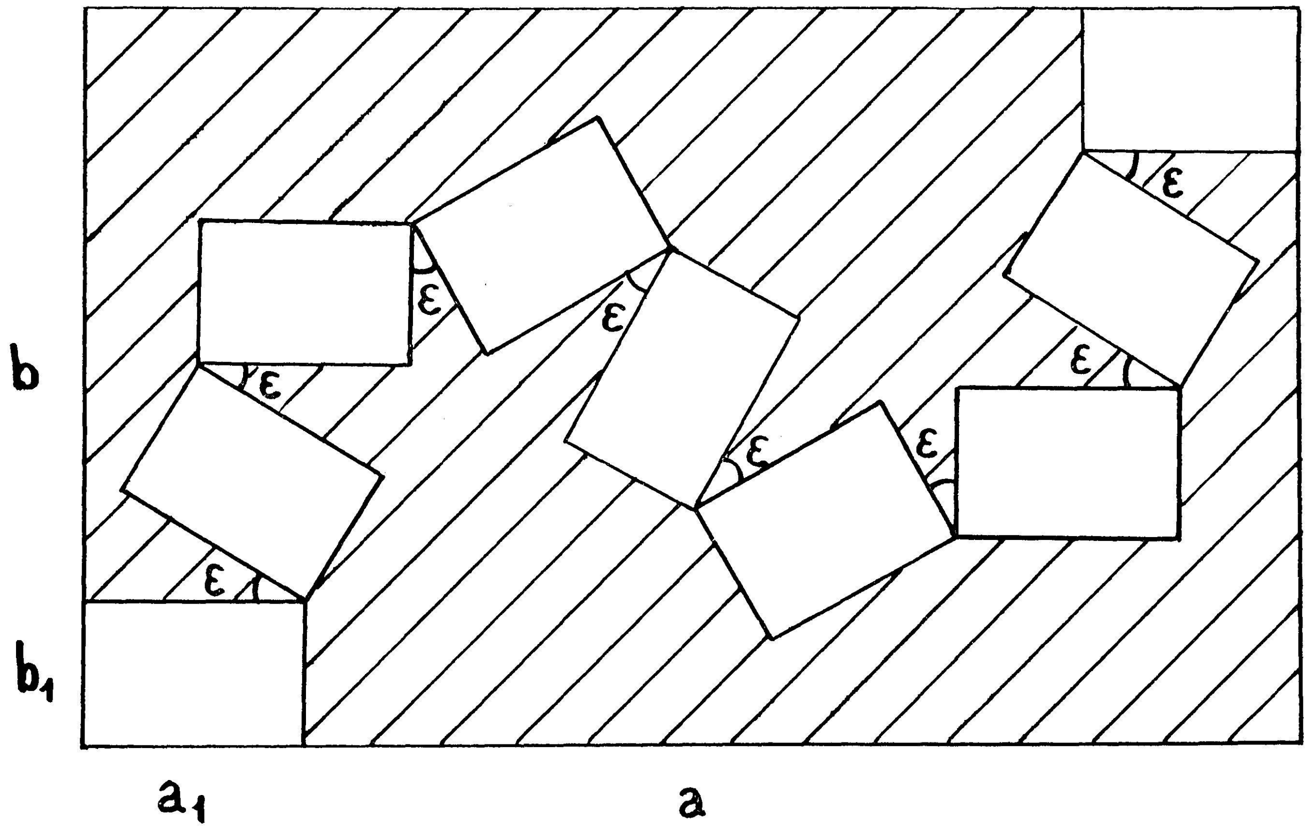
$$\nu(J) \leqslant 4c''\left(\frac{1}{3^n}\right)^{2\beta} \leqslant C\,|J|^{2\beta}.$$

On en déduit

$$dim\,\{f(K)\} \geqslant 2\beta$$

$$dim\,\{f(K)\} = 2\,dim\,K\,.$$

II. Une légère modification des remarques précédentes permet d'obtenir une application continue du segment [0, 1] dans le plan qui soit *injective* et telle que tout compact de [0, 1] ait une image dont la dimension de Hausdorff soit double. Pour cela nous allons un peu bousculer les carrés servant à construire la courbe de Peano, de façon à « séparer » les points doubles; en fait il est commode de considérer des rectangles et de les subdiviser comme l'indique la figure.




Neuf rectangles de côtés $a_1$, $b_1$, faisant entre eux un petit angle $\varepsilon$, s'inscrivent dans un rectangle de côtés $a$, $b$:

$$\begin{cases} a = a_1(4 - \cos 2\varepsilon) + b_1(\sin 2\varepsilon + 4\sin\varepsilon) \\ b = a_1(-\sin 2\varepsilon + 4\sin\varepsilon) + b_1(4 - \cos 2\varepsilon)\,, \end{cases}$$

soit pour $\varepsilon$ tendant vers 0 $\begin{cases} a \sim 3a_1 + 6b_1\,\varepsilon \\ b \sim 3b_1 + 2a_1\,\varepsilon\,. \end{cases}$

Par conséquent, à partir d'un rectangle $(a, b)$ et pour un nombre $\eta > 0$ arbitraire, nous pouvons effectuer une dissection en neuf rectangles $(a_1, b_1)$

contenus dans le rectangle initial, l'angle $\varepsilon$ étant choisi assez petit pour que

$$\begin{cases} 9\, a_1\, b_1 > ab\,(1-\eta) \\ min\left(\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{b_1}{a_1}\right) > min\left(\dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{a}\right) - \eta\,. \end{cases}$$

Soit alors une suite de nombres $\eta_n$, $0 < \eta_n < 1$ telle que

$$(*) \qquad \prod_{n=0}^{\infty} (1-\eta_n) > \frac{1}{\sqrt{e}}$$

donc aussi
$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n < \frac{1}{2}\,.$$

Partant du carré unité, effectuons une suite de dissections en rectangles, chaque rectangle de la n$^{\text{ième}}$ dissection étant partagé en neuf rectangles de côtés $a_{n+1}$, $b_{n+1}$ de manière que

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad 9\, a_{n+1}\, b_{n+1} > a_n\, b_n\,(1-\eta_n) \\ \text{(ii)} \quad min\left(\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}, \dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) > min\left(\dfrac{a_n}{b_n}, \dfrac{b_n}{a_n}\right) - \eta_n \end{cases}$$

$$a_0 = 1\,, \qquad b_0 = 1\,.$$

En faisant correspondre à tout intervalle $\left[\dfrac{k}{9^n}, \dfrac{k+1}{9^n}\right]$ de $[0, 1]$ le $k^{\text{ième}}$ rectangle de la chaîne obtenue à la $n^{\text{ième}}$ dissection, on définit une application continue de $[0, 1]$ dans le carré unité, $f$, dont l'image est une courbe simple.

Si $K$ est un compact de $[0, 1]$, en conservant les notations du I, on définit une mesure $\nu$ sur $f(K)$. Comme les rectangles de la $n^{\text{ième}}$ dissection ont une aire supérieure à $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(9)^n}$ et que le rapport des longueurs des côtés est supérieur à $\dfrac{1}{2}$, le carré :

$$J = \left\{ \{x, y\}\,, \quad \frac{p}{3^n} \leqslant x < \frac{p+1}{3^n}\,, \quad \frac{q}{3^n} \leqslant y < \frac{q+1}{3^n} \right\}$$

rencontre au plus 100 de ces rectangles, donc $\nu\,(I) \leqslant 100\, c \left(\dfrac{1}{9}\right)^{\beta}$. La démonstration s'achève ensuite comme dans la première partie.

## RÉFÉRENCE

[1] Kahane, J.-P. et R. Salem. *Ensembles parfaits et séries trigonométriques.* Hermann, 1963.

*(Reçu le 30 mars 1968)*

J.-P. Schreiber
Faculté des Sciences d'Orsay.