

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Autor(en): **Malgrange, Bernard**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-41526>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

par BERNARD MALGRANGE

En commençant cet aperçu des travaux d'Hadamard, que Poincaré qualifiait à l'époque de « considérables et de premier ordre », disons tout d'abord que nous n'avons pas la prétention d'être complet: on doit à Hadamard, non seulement des travaux célèbres sur la notion de problème correctement posé, le problème de Cauchy, les problèmes mixtes, etc., mais encore quantité d'aperçus, de remarques, à l'occasion des questions les plus variées, et qui ont inspiré tous les spécialistes de la génération suivante, et encore de plus jeunes; je me bornerai à en signaler certaines au passage, que l'état actuel de la théorie peut mettre particulièrement en lumière.

Deux notices sur l'ensemble de son œuvre ont paru récemment: l'une, due à S. Mandelbrojt et L. Schwartz (*Bulletin of the American Mathematical Society*, 1965), l'autre à M. L. Cartwright (*Bibliographical Memoirs of the Fellows of the Royal Society*, 1965); elles ont considérablement facilité mon travail, et je me permettrai de les utiliser librement, en évitant dans quelques cas de les répéter: c'est ainsi que je renvoie à la seconde de ces notices pour une discussion de l'apport propre de Hadamard à la Mécanique des milieux continus, qui sort un peu de mon sujet, et où je ne me reconnais au surplus guère de compétence.

I. Propagation des discontinuités

Cette question est au centre du premier ouvrage d'importance d'Hadamard sur notre sujet: les *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique* », [6], 1903, reproduisant avec quelques compléments ses cours de 1898-99 et 1899-1900. Avant qu'elle soit étudiée en général, deux cas importants sont examinés: les équations d'un fluide compressible, (notamment, dans le cas unidimensionnel où Hadamard reprend les travaux de Riemann, Rankine, Hugoniot, en les complétant sur le point de la conservation ou de la non-conservation des tourbillons suivant le type de la discontinuité), et les équations de l'élasticité. Il étend ensuite au cas général

une partie des considérations précédentes, d'une manière que nous allons résumer brièvement.

Considérons un système

$$L(U) \equiv \sum A_{ij} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} + B = 0 \quad (A_{ij} = A_{ji})$$

où U est une fonction des x_i , à p composantes, et A (resp. B) une matrice de type $p \times p$ (resp. $1 \times p$), fonctions régulières des x_i , de U , et des $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ (nous nous limitons à l'ordre deux, pour simplifier l'exposé).

Etant donné une hypersurface régulière (H) d'équation $H = 0$, peut-il exister deux solutions de notre équation, U_1 et U_2 , se raccordant ainsi que leurs dérivées premières sur (H), mais non leurs dérivées secondes ?

Il est facile de voir, de voir d'abord que la condition suivante est nécessaire: (H) doit être caractéristique; autrement dit la matrice: $\Sigma A_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial x_j}$ doit être partout de rang $< p$ sur H .

Cette condition n'est cependant pas suffisante, comme le montre l'exemple de l'équation de la chaleur $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$; et une étude complète

de la question semble encore aujourd'hui d'une complication inextricable. Hadamard, à la suite des travaux de Goursat et Beudon, se limite essentiellement au cas des caractéristiques simples, dont nous allons dire deux mots; supposons pour simplifier (cas auquel on peut toujours se ramener par changement de variables), que l'on ait $H = x_1$; la matrice précédente se réduit alors à A_{11} ; supposons que, en tout point de (H), $\lambda = 0$ soit racine simple de l'équation caractéristique $\det(A_{11} - \lambda I) = 0$; soient Y et Z des vecteurs propres à gauche et à droite de A_{11} , qui dépendront évidemment de

x_2, \dots, x_n . On voit d'abord que les données U et $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ sur (H) ne peuvent être

quelconques, puisque l'équation $YL(u) = 0$ ne fait intervenir que U , $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, et leurs dérivées tangentielles (U désigne ici U_1 ou U_2). De plus, en

posant, sur (H): $\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \right] = \frac{\partial^2 U_1}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2}$, on voit que cette quantité doit être un vecteur propre de A_{11} , donc être de la forme $\lambda(x_2, \dots, x_n) Z$: ceci

est un point essentiel pour les applications; enfin λ doit encore satisfaire à une équation aux dérivées partielles que l'on obtiendra en dérivant l'équation initiale par rapport à x_1 , et en multipliant à gauche l'équation obtenue par Y (l'hypothèse de « caractéristique simple » s'exprime ici par une propriété de l'équation finalement obtenue, que nous ne détaillerons pas.) Inversement, dans le cas d'une équation analytique, et de données analytiques vérifiant les « conditions de compatibilités » indiquées, et toujours dans le cas de caractéristiques simples, Hadamard montre, en généralisant des calculs de Darboux, Goursat et Beudon, l'existence de solutions U prenant effectivement sur H les valeurs imposées, ainsi que leurs dérivées d'ordre 1 et 2 (l'analyse peut d'ailleurs se poursuivre à l'ordre supérieur). Hadamard examine aussi un cas de caractéristique multiple intéressant les équations de l'élasticité, où la même analyse s'applique.

On s'étonnera peut-être de ce que nous ayons un peu insisté sur l'analyse précédente, au demeurant fort simple, et due pour l'essentiel à d'autres auteurs que le nôtre; mais, outre l'intérêt qui s'attache aux applications qu'il en fait à la mécanique, Hadamard est amené à ce propos à discuter (sinon à résoudre) un problème étroitement lié au précédent: celui de l'unicité du problème de Cauchy, en distinguant soigneusement, ce qu'on ne faisait pas toujours à l'époque, entre données et solution différentiables ou analytiques; les résultats obtenus à cette époque, qu'il discute soigneusement étaient les suivants: *a*) Le résultat de Darboux-Goursat-Beudon sur la non-unicité dans le cas d'équations à coefficients analytiques et de caractéristiques simples; *b*) Le théorème de Holmgren, sur l'unicité du problème de Cauchy dans le cas de données (différentiables) non caractéristiques, pour une équation *linéaire* à coefficients *analytiques*. Hadamard insiste notamment sur l'intérêt qu'il y aurait à éliminer l'hypothèse « analytique » dans ce dernier résultat, ce qui permettrait d'ailleurs d'éliminer aussi l'hypothèse « linéaire ». Comme on le sait, cette question n'a réellement progressé qu'à une époque fort récente: si des contre-exemples de Plis et Cohen montrent que la « conjecture d'Hadamard » est, dans toute sa généralité, fautive, d'importants travaux de Carleman, Calderón, Hörmander, et d'autres auteurs montrent qu'elle est néanmoins exacte dans des cas très étendus; quant à la question *a*), elle n'a guère progressé depuis, sauf pour les équations à coefficients constants. En passant, tout ceci montre que Hadamard, lorsqu'il avait une motivation pour cela, ne s'intéressait pas seulement aux problèmes « correctement posés », quoique cette dernière question soit un de ses principaux titres de gloire.

Notons enfin que l'analyse précédente ne permet de traiter que les discontinuités « d'ordre supérieur », et non les discontinuités du premier ordre, telles qu'elles se présentent en particulier dans les travaux de Riemann, Rankine et Hugoniot sur les fluides compressibles. Dans ce dernier cas, Hadamard, comme les auteurs de cette époque, ne voit d'autre méthode que celle qui consiste à traiter chaque problème physique séparément, en « reprenant la mise en équations », suivant ses propres termes. Nous savons aujourd'hui que, dans un grand nombre de cas (en particulier celui de Riemann-Rankine-Hugoniot, comme l'ont montré Hopf et Lax), les conditions que l'on obtient ainsi sont précisément celles que l'on trouve en écrivant que les équations sont satisfaites au sens des distributions, ce qui permet une discussion mathématique générale de telles discontinuités: ce n'est pas ici le lieu de l'aborder.

2. Solution élémentaire des équations du second ordre

Rappelons rapidement les principes de l'utilisation des solutions élémentaires: soit L un opérateur différentiel linéaire dans R^n , L' son adjoint de Lagrange, et Ω un ouvert de frontière régulière $b\Omega$; on a la formule suivante, dite « de Green »

$$\int_{\Omega} [vL(u) - uL'(v)] dV = \int_{b\Omega} M(u, v) dS$$

M étant une fonction convenable de u , v et de leurs dérivées. Dans le cas *elliptique*, la méthode consiste à trouver, pour tout point $a \in \Omega$, une fonction v ayant une singularité convenable en a (nous préciserons plus loin), vérifiant en dehors de a : $L'(v) = 0$, et à appliquer la formule précédente à Ω privé d'une boule de centre a et de rayon ε . On a alors, avec des notations évidentes:

$$\int_{\Omega - B_{\varepsilon}} v L(u) dV = \int_{b\Omega} M(u, v) dS - \int_{S_{\varepsilon}} M(u, v) dS$$

Lorsque v est choisi convenablement, et lorsque u est assez régulier dans Ω , la dernière intégrale tend vers $-u(a)$ lorsque ε tend vers 0; on obtient donc à la limite

$$\int_{\Omega} v L(u) dV - \int_{b\Omega} M(u, v) dS = u(a)$$

formule qui fait connaître $u(a)$ en fonction des valeurs de $L(u)$ dans Ω , et celles de u et certaines de ses dérivées sur $b\Omega$ (en langage moderne, cette

formule s'écrit, au sens des distributions $L'(v) = \delta_a$). On dira alors que v est une solution élémentaire de L' au point a . Si l'on veut traiter le problème de Dirichlet, ou de Neumann, ou un autre, il faudra encore préciser le choix de v , de manière à ne faire intervenir dans l'intégrale de surface que les combinaisons données de u et de ses dérivées; mais peu importe ici.

Cette méthode avait été appliquée depuis fort longtemps déjà à l'équation de Laplace avec $v = \log r$ pour deux variables, $v = r^{2-n}$ pour $n > 2$ variables, et aux fonctions holomorphes, avec $v = \frac{1}{z}$ (on obtient alors la

formule intégrale de Cauchy, avec sa démonstration habituelle; il est d'ailleurs curieux que l'identité de ce cas avec les autres n'ait guère été souligné traditionnellement). Des travaux de divers auteurs, dont Picard, Sommerfeld, Hilbert, et Hadamard lui-même (voir les *Leçons* précédemment citées, pp. 335-338) avaient traité les équations elliptiques à deux variables, à coefficients analytiques; d'importants travaux de Fredholm avaient traité à la même date des équations elliptiques à coefficients constants, l'ordre et le nombre de variables étant quelconques. En 1904, Hadamard [2] démontre l'existence (locale) des solutions élémentaires des équations elliptiques du second ordre, à coefficients analytiques; l'hypothèse d'analyticité sera levée ensuite par la « méthode de la paramétrix », par E. E. Levi et Hilbert.

Quelques précisions sur la méthode et le résultat d'Hadamard. Prenons

$$L(u) = \sum A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + C u \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

et supposons les A_{ij} réels, et la forme $\sum A_{ij} \xi_i \xi_j$ définie positive pour tout x ; introduisons la métrique riemannienne dont les coefficients par rapport à des coordonnées covariantes sont égaux aux A_{ij} ; dans cette métrique, L prend la forme $\Delta + M$, Δ étant l'opérateur de Laplace-Beltrami, et M un opérateur du premier ordre; désignons enfin par $\Gamma(x)$ le carré de la distance géodésique du point a donné à un point x voisin de a . Deux cas sont à distinguer:

a) Si n est impair, Hadamard cherche une solution dans le complémentaire de a de l'équation $L(v) = 0$, qui soit de la forme suivante

$$v = \frac{1}{\Gamma^p} \sum_{k=0}^{+\infty} U_k \Gamma^k, \text{ avec } p = \frac{n-2}{2}, U_0(a) \neq 0, \text{ et les } U_k \text{ analytiques}$$

au voisinage de a . Pour l'obtenir, on passe dans le domaine complexe; en transformant l'équation proposée, on trouve que, sur le cône $\Gamma = 0$ les U_k doivent satisfaire à une équation différentielle le long des géodésiques, qui admet a pour point singulier, et permet de les déterminer de proche en proche; le calcul montre aussi l'unicité de v , une fois choisi $U(a)$ (dont la valeur est d'ailleurs déterminée si l'on veut exactement une solution élémentaire, et non un multiple): un calcul de majorations permet enfin de s'assurer de la convergence de la série obtenue.

b) Dans le cas où n est pair, il cherche une solution de la forme:

$$v = \frac{1}{\Gamma^p} \sum_{k=0}^B U_k \Gamma^k + W \log \Gamma$$

Le procédé est encore analogue au précédent (on détermine encore W par un développement $\sum W_k \Gamma^k$); la solution n'est ici unique qu'à l'addition près d'une solution analytique de $L(u) = 0$.

En vue de l'utilisation ultérieure de la « méthode de descente », Hadamard étudie encore de façon détaillée la relation qui existe entre la solution élémentaire de L , et celle de l'opérateur à $n + 1$ variables $\frac{\partial^2}{\partial z^2} + L$.

3. La notion de « problème correctement posé »

Il s'agit là d'une des plus importantes contributions d'Hadamard à la théorie. Vers 1900, la distinction entre données (et solutions) différentiables ou analytiques était loin d'être nette dans les esprits, et beaucoup d'auteurs considéraient le théorème de Cauchy-Kowalewskaya comme une réponse satisfaisante au problème de Cauchy; déjà, dans les *Leçons*, Hadamard note, sans s'expliquer davantage, la différence de nature entre ce théorème, et les méthodes de Poisson, Kirchhoff, Riemann, méthodes conduisant à des « formules explicites » et à des vitesses de propagation finies; il note également que les cas traités par ces auteurs, à l'occasion de problèmes physiques, font toujours intervenir des équations dont la partie principale est de signature $(1, n-1)$, et que les surfaces portant les données initiales ont une « orientation d'espace » (comme il dira plus tard) alors que, dans le théorème de Cauchy-Kowalewskaya, ces restrictions n'interviennent pas. La contradiction qui semble se présenter ici sera levée par une analyse célèbre, où les considérations mathématiques sont amenées à

partir de la signification — ou l'absence de signification— physique des problèmes considérés. Hadamard reviendra fréquemment sur cette question, qui se trouve exposée en détail dans *Le problème de Cauchy* (1922, [1] et 1932, [6]). Ses conclusions peuvent en être résumées ainsi: les problèmes aux limites que l'on rencontre en physique doivent posséder une solution et une seule, et qui dépende continuellement des données au sens suivant: si l'on modifie légèrement les données (et, éventuellement, un nombre fini de leurs dérivées), la solution doit peu varier; autrement, nous n'avons pas une solution physique de notre problème, puisque, en pratique, les données ne sont connues qu'avec une certaine approximation. Mandelbrojt et Schwartz, dans leur notice, remarquent à ce propos: « Cette idée fut encore plus fructueuse qu'il ne l'avait imaginé lui-même: car les analystes furent alors obligés d'examiner, comme il dit, les « divers ordres de voisinage et de continuité », ce qui conduit inévitablement aux espaces fonctionnels, à la topologie générale, et à l'analyse fonctionnelle... Les méthodes modernes pour résoudre les équations aux dérivées partielles utilisent des « majorations a priori », ce qui signifie, qu'en fait, on démontre l'existence et l'unicité d'une solution en commençant par prouver sa continuité par rapport aux données. » Hadamard examine de ce point de vue divers problèmes: problème de Dirichlet dans les cas elliptiques et hyperbolique (ce dernier non correctement posé, et dépendant de conditions arithmétiques sur les données), problèmes mixtes, sur lesquels nous reviendrons plus loin, et surtout problème de Cauchy, dont il montre en détail qu'il n'est pas correctement posé pour les équations elliptiques: traitant l'exemple de l'équation de Laplace, et de données hyperplanes, il remarque d'abord que, pour des données continues, ou p -fois continuellement différentiables, la solution ne peut exister des deux côtés puisque les données devraient alors être analytiques, et il en conclut que même la solution unilatérale ne peut pas toujours exister. En outre, la solution, quand elle existe, ne dépend pas continuellement des données; nous lui laissons ici la parole:

« Nous avons toujours soutenu, contre plusieurs géomètres, l'importance de cette distinction; quelques-uns d'entre eux arguaient du fait que l'on peut toujours considérer des fonctions quelconques comme analytiques, attendu que, dans le cas contraire, elles peuvent être approchées avec autant de précision qu'on veut à l'aide de fonctions analytiques. Mais, à notre avis, cet argument ne porte pas, la question n'étant pas de savoir si une telle approximation altérera très peu les données, mais si elle altérera très peu la solution; il est facile de voir que, dans le cas qui nous occupe,

les deux questions ne sont en aucune façon équivalentes. Prenons l'équation classique des potentiels pour deux dimensions

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

avec les données de Cauchy suivantes

$$u(o, y) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(o, y) = u_1(y) = A_n \sin(ny)$$

n étant très grand, mais A_n étant une fonction de n assujettie à être très petite quand n devient très grand (par exemple $A_n = \frac{1}{n^p}$ etc.) Ces données diffèrent aussi peu que l'on veut de zéro; cependant, un tel problème de Cauchy a pour solution

$$u_n = \frac{A_n}{n} \sin(ny) \operatorname{sh}(nx)$$

laquelle, si

$$A_n = \frac{1}{n} \text{ ou } \frac{1}{n^p}, \text{ ou } e^{-\sqrt{n}}$$

est très grande pour toute valeur déterminée de x différente de zéro, à cause du mode de croissance de e^{nx} et par conséquent de $\operatorname{sh}(nx)$ ».

On pourrait, certes, penser à un autre argument; si la solution dépendait continuellement des données, un passage à la limite à partir du théorème de Cauchy-Kowalewskaya montrerait l'existence de la solution pour toute donnée suffisamment différentiable (ce dernier raisonnement a été effectivement utilisé par la suite, notamment par Petrowsky et Leray pour les équations hyperboliques d'ordre supérieur; connaissant par des majorations a priori la continuité par rapport aux données, on peut en déduire l'existence de la solution du problème de Cauchy). Mais le raisonnement d'Hadamard conserve néanmoins tout son intérêt: sous des conditions très générales le théorème du graphe fermé de Banach montre inversement que, pour des équations linéaires, l'existence et l'unicité de la solution impliquent sa continuité par rapport aux données; ceci permet, par des généralisations du raisonnement que nous venons de citer, d'obtenir des

conditions nécessaires pour que tel problème admette une solution: tel est, par exemple, le point de départ des travaux de Gårding sur les équations hyperboliques d'ordre supérieur.

Et d'une façon générale, le point de vue d'Hadamard suivant lequel il convient de classer les équations en fonction des propriétés de leurs solutions différentiables (plutôt qu'analytiques) a contribué de façon décisive au progrès de la théorie et garde aujourd'hui toute sa valeur d'orientation, même si on ne l'exprime plus nécessairement en termes de « problèmes correctement posés ».

4. *Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques d'ordre deux*

Il s'agit là de la contribution majeure d'Hadamard à la théorie des équations aux dérivées partielles. Etant donnée une équation du second ordre, à partie principale de signature $(1, n-1)$, et une hypersurface (S) à orientation d'espace, on peut prévoir, pour des raisons physiques notamment, que le problème de Cauchy sera correctement posé, et que la solution, en un point a , ne dépendra que des données (conditions initiales, et second membre), dans la région (V) limitée par (S) et le cône caractéristique issu de a (plus précisément: le demi-cône caractéristique dont les génératrices rencontrent (S)). Telles étaient aussi les conclusions suggérées par les cas déjà traités: équation des ondes à trois dimensions d'espace (donc à quatre variables), par Poisson et Kirchhoff, équations hyperboliques à deux variables, par Riemann (l'existence de la « fonction de Riemann » ayant été démontrée dans le cas analytique par Darboux); enfin, équation des ondes à n variables, par Volterra et Tedone. Hadamard donne la solution pour une équation à coefficients analytiques, d'abord en 1905 [1] pour trois variables, puis en 1908 [3] dans le cas général. Son idée, comme celle de Riemann ou de Volterra, dont il discute les méthodes en détail, consiste en principe à appliquer la formule de Green dans le domaine V ; on est conduit à prendre pour solution de l'équation adjointe ce qu'il nomme la « solution élémentaire », qui n'est autre que la fonction construite par le même procédé que la solution élémentaire dans le cas elliptique (cette fonction avait été construite dans le domaine complexe, et le type de l'équation n'intervenait donc pas dans son calcul¹). On essaie alors

¹ Aujourd'hui, à la suite de L. Schwartz, il paraît plus naturel de prendre pour définition d'une solution élémentaire la formule $L(v) = \delta_a$; mais ceci exige le concept de distribution. Ce que Hadamard appelle solution élémentaire n'est donc plus, dans le cas hyperbolique, ce que l'on appellerait ainsi aujourd'hui; mais c'est une fonction, ayant une singularité convenable, et servant d'intermédiaire dans le calcul de la « solution élémentaire » au sens actuel.

de copier le calcul usuel que l'on fait dans le cas elliptique; mais ici, même en isolant le point a , on trouve des intégrales divergentes sur tout le cône caractéristique; dans le cas de deux variables, la méthode de Riemann permettait d'éliminer cette difficulté à cause de certaines particularités; d'un autre côté, Volterra et Tedone la surmontaient par des intégrations préalables le long de certaines courbes: Hadamard note que ce procédé pourrait être généralisé, mais qu'il présente un côté artificiel (et notamment, dans le cas de l'équation des ondes, n'est pas invariant par les transformations de Lorentz). Il montre que l'on peut surmonter directement la difficulté au moyen de la notion de « partie finie d'une intégrale divergente », qu'il introduit et développe à cette occasion.

Avant d'en dire plus sur le problème de Cauchy, il convient de s'arrêter quelque peu sur cette notion. Commençons, comme Hadamard, par examiner des fonctions d'une variable; considérons l'intégrale

$$I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^a \frac{f(x)}{x^{\alpha}} dx, \quad \alpha > 0 \text{ non entier (cette restriction est essentielle); lorsque}$$

f est suffisamment dérivable en 0, on peut trouver des constantes λ_p ($0 < p < \alpha$, p entier), telles que la quantité $I(\varepsilon) - \sum \lambda_p \varepsilon^{p-\alpha}$ ait une limite pour ε tendant vers 0; il appelle cette limite « partie finie » de l'intégrale

considérée, et la note $\overline{\int_0^a \frac{f(x)}{x^{\alpha}} dx}$ (nous écrirons plutôt $P.f. \int_0^a \dots$). Il montre que

cette intégrale généralisée possède de remarquables propriétés relativement au changement de variables, à l'intégration par parties (que l'on fait comme si la borne inférieure n'existait pas), et à la dérivation par rapport à la

borne inférieure: la dérivée par rapport à b de $P.f. \int_0^a \frac{f(x, b) dx}{(x-b)^{\alpha}}$ se calcule

comme si la borne inférieure était fixe. Il remarque à ce propos: « Il s'ensuit que toute équation différentielle (linéaire) qui serait vérifiée par l'intégrale (considérée comme une fonction de b) si elle était prise entre les limites constantes a, c , l'est aussi quand une des limites est justement b »; idée dont il fait remonter le principe à Darboux (voir *Le problème de Cauchy* [6], 1932, pp. 167 et 194).

Passant ensuite aux intégrales multiples, il définit et étudie de même l'expression

$$P.f. \int_V \frac{f(x)}{[G(x)]^{\alpha}} dx,$$

lorsqu'une partie de la frontière de V est constituée par l'hypersurface $G = 0$, supposée régulière.

Il convient de noter ici combien cette notion pouvait sembler inattendue et paradoxale à l'époque, et à Hadamard lui-même, comme il l'a dit souvent; certes, on connaissait déjà les intégrales convergeant en « valeur principale, au sens de Cauchy », et qui exigeaient pour exister des conditions de dérivabilité sur f ; mais, là, il n'était pas nécessaire de retrancher des infiniment grands, et, pour cette raison, la « partie finie » semblait à Hadamard de nature fort différente. Il faut noter aussi, avec L. Schwartz toute son importance pour le développement de la théorie des distributions, dont les parties finies fournissent naturellement les premiers exemples non triviaux, et où elles conduisent naturellement au « problème de la division ».

Muni de cette théorie, Hadamard peut alors résoudre le problème de Cauchy, en commençant par le cas d'un nombre impair de variables; la méthode indiquée plus haut peut alors s'appliquer, en commençant par isoler le point a en retranchant du domaine d'intégration (V) la portion (W) située entre le conoïde caractéristique et une hypersurface d'espace (Σ) proche de a ; il applique alors la formule de Green au sens des parties finies; avec des notations que nous avons déjà employées, et en prenant pour v la « solution élémentaire » décrite plus haut on trouve

$$Pf \int_{V-W} v L(u) dV = Pf \int_{S'} M(u, v) dS - Pf \int_{\Sigma'} M(u, v) dS$$

S' (resp. Σ') désignant la portion de S (resp. Σ) contenue à l'intérieur du conoïde caractéristique; le fait important est qu'ici, il n'y a pas d'intégrale sur le conoïde caractéristique (son équation est $\Gamma = 0$, et v est de la forme

$\frac{U}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}}$), et par conséquent, tout est connu en fonction des données à l'exception du dernier terme; or il montre précisément que (comme dans le cas elliptique), ce dernier terme tend vers $ku(a)$, k étant une constante numérique aisée à calculer, lorsque Σ s'approche de a . On obtient ainsi une formule que doit nécessairement vérifier la solution du problème de Cauchy; reste à montrer que l'on a effectivement obtenu la solution.

Le cas d'un nombre pair de variables est plus délicat. Hadamard en donne d'abord la solution par la « méthode de descente », i.e. en rajoutant une variable d'espace, prenant des données qui n'en dépendent pas, et éliminant cette variable dans les formules définitives; si le principe est fort simple, les calculs sont assez compliqués dans le détail. Plus tard, en 1924

[1], il donnera également une méthode directe dont on pourrait dire, en deux mots, qu'elle consiste à faire le même type de calculs, en substituant à la notion de « partie finie » d'une intégrale divergente celle de « partie logarithmique » (notion qu'il n'introduit pas explicitement). Cependant ici, la solution s'exprime par des intégrales ordinaires, mais de deux types: d'une part des intégrales dans V et S' ; d'autre part des intégrales « de surface » sur le conoïde caractéristique, et son intersection avec S . Dans le cas de l'équation des ondes à un nombre pair de variables, en particulier dans le « potentiel retardé » de Poisson-Kirchhoff, les termes du premier type ne se présentent pas: Hadamard se livre à cette occasion à une discussion, aujourd'hui classique, du « principe de Huygens », distinguant entre la « mineure », qui exprime la propriété précédente, et la « majeure », propriété générale des équations d'évolution; il montre que, pour les équations d'ordre deux, la « mineure » ne peut être satisfaite que pour un nombre pair de variables, et qu'elle équivaut au fait que la « solution élémentaire » de l'équation adjointe n'a pas de terme logarithmique, autrement dit qu'on a (avec les notations du paragraphe 2) $W = 0$. Il se pose à ce propos la question de savoir s'il existe d'autres équations que l'équation des ondes, et celles qui s'en déduisent par des transformations évidentes, qui possèdent cette propriété. Malgré tout leur intérêt, nous nous permettrons de ne pas insister davantage sur ces questions, et de renvoyer à ce propos le lecteur aux notices déjà citées.

Mentionnons enfin que, dans *Le problème de Cauchy*, Hadamard, s'inspirant des travaux de Levi et Hilbert dans le cas elliptique, élimine l'hypothèse d'analyticité des coefficients en montrant que, si ceux-ci sont assez dérivables, une solution élémentaire approchée permet de ramener le problème à une équation intégrale du type de Volterra, qui se résoud par approximations successives. Pour établir que la solution de l'équation intégrale répond au problème proposé, il est amené à établir en passant la « continuité d'ordre fini » de la solution du problème de Cauchy par rapport aux coefficients de l'équation, question que les considérations conduisant à la notion de « problème correctement posé » amenaient naturellement à envisager.

5. Les problèmes mixtes

Le « problème mixte » (le nom est d'Hadamard) auquel il s'intéresse est le suivant: étant donnée une équation hyperbolique du second ordre L ,

et un ouvert V en forme de demi-cylindre, de base une hypersurface S' à orientation d'espace, de surface latérale une hypersurface S'' à orientation de temps, trouver une fonction u dans V connaissant Lu dans V , u et ses dérivées premières sur S' , et u (ou, par exemple $\frac{du}{dn}$) sur S'' . Hadamard,

dès ses premiers travaux sur les équations aux dérivées partielles, avait rencontré ce problème ou des variantes, notamment à propos des fluides compressibles; en 1900 [3], il montre dans le cas de l'équation des ondes et d'un « cylindre droit » (i.e. produit d'un ouvert d'espace par la demi-droite $t > 0$) l'unicité du problème en utilisant l'intégrale d'énergie dont ce semble être la première apparition comme instrument de démonstration dans la théorie des équations hyperboliques (mais non la dernière, comme on sait). Une note dans *Le Problème de Cauchy*, traduction française (1932 [6]) résume ses travaux sur la question. Il note que ce type de problèmes peut être traité par deux types de méthodes: l'une, celle des « fonctions fondamentales » (i.e. des fonctions propres), qui « retiennent, en quelque sorte, l'aspect elliptique du problème » — on pourrait d'ailleurs en dire autant de la méthode par transformation de Laplace, équivalente à celle de Heaviside, qu'il cite brièvement.

L'autre, cherche à retenir l'aspect hyperbolique du problème, la propagation des ondes, les réflexions sur les parois, et qui évite de faire jouer sans nécessité un rôle spécial à une variable de temps particulière. Il nous faut ajouter que les deux types de méthodes ont, en fait, un domaine d'application assez différent: la première s'applique à des produits d'un ouvert d'espace par la demi-droite $t > 0$, et à des équations non nécessairement hyperboliques; la seconde, à des ouverts « variables au cours du temps », mais est limitée aux équations hyperboliques (et même, encore maintenant, essentiellement aux équations du second ordre).

C'est à ce second type de méthodes que s'attache Hadamard: il note d'abord que, aux points dont le conoïde caractéristique rétrograde rencontre entièrement la frontière sur S' , le problème coïncide avec le problème de Cauchy: traçant l'hypersurface caractéristique Σ passant par $S' \cap S''$, on est ramené, pour trouver la solution, à un problème du type de Goursat: trouver la solution entre Σ et S'' , connaissant ses valeurs sur ces deux surfaces; dans le cas analytique, le théorème de Goursat dont nous avons parlé au paragraphe 1 fournit alors la solution (tout au moins au voisinage de la surface initiale S' ; le prolongement demande d'autres arguments, notamment la « majeure » du principe de Huygens). Il ne pousse pas plus

loin cette méthode qui sera reprise ultérieurement par Schauder et lui fournira, avec les majorations a priori qu'il déduira de l'intégrale d'énergie, la solution du problème; quant à Hadamard, il préfère opérer de façon un peu différente, en cherchant, en langage moderne, le noyau élémentaire qui donne u en fonction des données du problème, et il esquisse une méthode le lui donnant, au moyen de réflexions et d'équations intégrales (analogues à celles considérées précédemment dans le cas non analytique du problème de Cauchy). Les conclusions auxquelles il arrive, notamment sur les singularités du noyau élémentaire et sur la conception des problèmes elliptiques comme limites de problèmes mixtes hyperboliques semblent avoir été partiellement délaissées depuis; on peut penser que de nouvelles études mériteraient encore d'y être consacrées.