

3. La notion de « problème correctement posé »

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

au voisinage de a . Pour l'obtenir, on passe dans le domaine complexe; en transformant l'équation proposée, on trouve que, sur le cône $\Gamma = 0$ les U_k doivent satisfaire à une équation différentielle le long des géodésiques, qui admet a pour point singulier, et permet de les déterminer de proche en proche; le calcul montre aussi l'unicité de v , une fois choisi $U(a)$ (dont la valeur est d'ailleurs déterminée si l'on veut exactement une solution élémentaire, et non un multiple): un calcul de majorations permet enfin de s'assurer de la convergence de la série obtenue.

b) Dans le cas où n est pair, il cherche une solution de la forme:

$$v = \frac{1}{\Gamma^p} \sum_{k=0}^B U_k \Gamma^k + W \log \Gamma$$

Le procédé est encore analogue au précédent (on détermine encore W par un développement $\sum W_k \Gamma^k$); la solution n'est ici unique qu'à l'addition près d'une solution analytique de $L(u) = 0$.

En vue de l'utilisation ultérieure de la « méthode de descente », Hadamard étudie encore de façon détaillée la relation qui existe entre la solution élémentaire de L , et celle de l'opérateur à $n + 1$ variables $\frac{\partial^2}{\partial z^2} + L$.

3. La notion de « problème correctement posé »

Il s'agit là d'une des plus importantes contributions d'Hadamard à la théorie. Vers 1900, la distinction entre données (et solutions) différentiables ou analytiques était loin d'être nette dans les esprits, et beaucoup d'auteurs considéraient le théorème de Cauchy-Kowalewskaya comme une réponse satisfaisante au problème de Cauchy; déjà, dans les *Leçons*, Hadamard note, sans s'expliquer davantage, la différence de nature entre ce théorème, et les méthodes de Poisson, Kirchhoff, Riemann, méthodes conduisant à des « formules explicites » et à des vitesses de propagation finies; il note également que les cas traités par ces auteurs, à l'occasion de problèmes physiques, font toujours intervenir des équations dont la partie principale est de signature $(1, n-1)$, et que les surfaces portant les données initiales ont une « orientation d'espace » (comme il dira plus tard) alors que, dans le théorème de Cauchy-Kowalewskaya, ces restrictions n'interviennent pas. La contradiction qui semble se présenter ici sera levée par une analyse célèbre, où les considérations mathématiques sont amenées à

partir de la signification — ou l'absence de signification— physique des problèmes considérés. Hadamard reviendra fréquemment sur cette question, qui se trouve exposée en détail dans *Le problème de Cauchy* (1922, [1] et 1932, [6]). Ses conclusions peuvent en être résumées ainsi: les problèmes aux limites que l'on rencontre en physique doivent posséder une solution et une seule, et qui dépende continuellement des données au sens suivant: si l'on modifie légèrement les données (et, éventuellement, un nombre fini de leurs dérivées), la solution doit peu varier; autrement, nous n'avons pas une solution physique de notre problème, puisque, en pratique, les données ne sont connues qu'avec une certaine approximation. Mandelbrojt et Schwartz, dans leur notice, remarquent à ce propos: « Cette idée fut encore plus fructueuse qu'il ne l'avait imaginé lui-même: car les analystes furent alors obligés d'examiner, comme il dit, les « divers ordres de voisinage et de continuité », ce qui conduit inévitablement aux espaces fonctionnels, à la topologie générale, et à l'analyse fonctionnelle... Les méthodes modernes pour résoudre les équations aux dérivées partielles utilisent des « majorations a priori », ce qui signifie, qu'en fait, on démontre l'existence et l'unicité d'une solution en commençant par prouver sa continuité par rapport aux données. » Hadamard examine de ce point de vue divers problèmes: problème de Dirichlet dans les cas elliptiques et hyperbolique (ce dernier non correctement posé, et dépendant de conditions arithmétiques sur les données), problèmes mixtes, sur lesquels nous reviendrons plus loin, et surtout problème de Cauchy, dont il montre en détail qu'il n'est pas correctement posé pour les équations elliptiques: traitant l'exemple de l'équation de Laplace, et de données hyperplanes, il remarque d'abord que, pour des données continues, ou p -fois continuellement différentiables, la solution ne peut exister des deux côtés puisque les données devraient alors être analytiques, et il en conclut que même la solution unilatérale ne peut pas toujours exister. En outre, la solution, quand elle existe, ne dépend pas continuellement des données; nous lui laissons ici la parole:

« Nous avons toujours soutenu, contre plusieurs géomètres, l'importance de cette distinction; quelques-uns d'entre eux arguaient du fait que l'on peut toujours considérer des fonctions quelconques comme analytiques, attendu que, dans le cas contraire, elles peuvent être approchées avec autant de précision qu'on veut à l'aide de fonctions analytiques. Mais, à notre avis, cet argument ne porte pas, la question n'étant pas de savoir si une telle approximation altérera très peu les données, mais si elle altérera très peu la solution; il est facile de voir que, dans le cas qui nous occupe,

les deux questions ne sont en aucune façon équivalentes. Prenons l'équation classique des potentiels pour deux dimensions

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

avec les données de Cauchy suivantes

$$u(o, y) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(o, y) = u_1(y) = A_n \sin(ny)$$

n étant très grand, mais A_n étant une fonction de n assujettie à être très petite quand n devient très grand (par exemple $A_n = \frac{1}{n^p}$ etc.) Ces données diffèrent aussi peu que l'on veut de zéro; cependant, un tel problème de Cauchy a pour solution

$$u_n = \frac{A_n}{n} \sin(ny) \operatorname{sh}(nx)$$

laquelle, si

$$A_n = \frac{1}{n} \text{ ou } \frac{1}{n^p}, \text{ ou } e^{-\sqrt{n}}$$

est très grande pour toute valeur déterminée de x différente de zéro, à cause du mode de croissance de e^{nx} et par conséquent de $\operatorname{sh}(nx)$ ».

On pourrait, certes, penser à un autre argument; si la solution dépendait continuellement des données, un passage à la limite à partir du théorème de Cauchy-Kowalewskaya montrerait l'existence de la solution pour toute donnée suffisamment différentiable (ce dernier raisonnement a été effectivement utilisé par la suite, notamment par Petrowsky et Leray pour les équations hyperboliques d'ordre supérieur; connaissant par des majorations a priori la continuité par rapport aux données, on peut en déduire l'existence de la solution du problème de Cauchy). Mais le raisonnement d'Hadamard conserve néanmoins tout son intérêt: sous des conditions très générales le théorème du graphe fermé de Banach montre inversement que, pour des équations linéaires, l'existence et l'unicité de la solution impliquent sa continuité par rapport aux données; ceci permet, par des généralisations du raisonnement que nous venons de citer, d'obtenir des

conditions nécessaires pour que tel problème admette une solution: tel est, par exemple, le point de départ des travaux de Gårding sur les équations hyperboliques d'ordre supérieur.

Et d'une façon générale, le point de vue d'Hadamard suivant lequel il convient de classer les équations en fonction des propriétés de leurs solutions différentiables (plutôt qu'analytiques) a contribué de façon décisive au progrès de la théorie et garde aujourd'hui toute sa valeur d'orientation, même si on ne l'exprime plus nécessairement en termes de « problèmes correctement posés ».

4. *Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques d'ordre deux*

Il s'agit là de la contribution majeure d'Hadamard à la théorie des équations aux dérivées partielles. Etant donnée une équation du second ordre, à partie principale de signature $(1, n-1)$, et une hypersurface (S) à orientation d'espace, on peut prévoir, pour des raisons physiques notamment, que le problème de Cauchy sera correctement posé, et que la solution, en un point a , ne dépendra que des données (conditions initiales, et second membre), dans la région (V) limitée par (S) et le conoïde caractéristique issu de a (plus précisément: le demi-conoïde caractéristique dont les génératrices rencontrent (S)). Telles étaient aussi les conclusions suggérées par les cas déjà traités: équation des ondes à trois dimensions d'espace (donc à quatre variables), par Poisson et Kirchhoff, équations hyperboliques à deux variables, par Riemann (l'existence de la « fonction de Riemann » ayant été démontrée dans le cas analytique par Darboux); enfin, équation des ondes à n variables, par Volterra et Tedone. Hadamard donne la solution pour une équation à coefficients analytiques, d'abord en 1905 [1] pour trois variables, puis en 1908 [3] dans le cas général. Son idée, comme celle de Riemann ou de Volterra, dont il discute les méthodes en détail, consiste en principe à appliquer la formule de Green dans le domaine V ; on est conduit à prendre pour solution de l'équation adjointe ce qu'il nomme la « solution élémentaire », qui n'est autre que la fonction construite par le même procédé que la solution élémentaire dans le cas elliptique (cette fonction avait été construite dans le domaine complexe, et le type de l'équation n'intervenait donc pas dans son calcul¹). On essaie alors

¹ Aujourd'hui, à la suite de L. Schwartz, il paraît plus naturel de prendre pour définition d'une solution élémentaire la formule $L(v) = \delta_a$; mais ceci exige le concept de distribution. Ce que Hadamard appelle solution élémentaire n'est donc plus, dans le cas hyperbolique, ce que l'on appellerait ainsi aujourd'hui; mais c'est une fonction, ayant une singularité convenable, et servant d'intermédiaire dans le calcul de la « solution élémentaire » au sens actuel.