Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1967)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DIVERS ASPECTS DE LA THÉORIE DES IDÉAUX D'UN ANNEAU COMMUTATIF

Autor: Lesieur, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41528

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

DIVERS ASPECTS DE LA THÉORIE DES IDÉAUX D'UN ANNEAU COMMUTATIF

(en liaison avec le radical de Jacobson et le théorème des zéros de Hilbert) [1])

par L. LESIEUR

Je présente ici deux théorèmes classiques d'algèbre, assez profonds, liés à la théorie des idéeaux d'un anneau. Le premier est un théorème de transfert de l'anneau A à l'anneau $A[X]$ des polynômes à une indéterminée X et à coefficients dans A; le deuxième est le célèbre théorème des zéros de Hilbert. Les démonstrations s'appuient sur la notion de radical de Jacobson d'un anneau et elles utilisent la théorie des idéaux.

L'intérêt de la théorie des idéaux dans l'enseignement des mathématiques n'est pas contestable: les propriétés des nombres entiers en arithmétique, en particulier celles qui font intervenir le plus grand commun diviseur ou le plus petit commun multiple, ne prennent toute leur valeur qu'en considérant les idéaux de l'anneau Z des entiers relatifs, qui sont tous principaux.

On gagne ainsi en élégance et en généralité [2]). On perd peut-être en simplicité; il ne faut pas dissimuler, en effet, que certains esprits trouvent en algèbre des difficultés plus grandes que dans d'autres branches des mathématiques; cela s'explique car le degré d'abstraction y est souvent plus grand. Par exemple, l'étude des propriétés des anneaux principaux, c'est-à-dire des anneaux dans lesquels tout idéal est principal, peut paraître plus abstraite que celle des propriétés des nombres réels en analyse: c'est que la structure du corps R des réels est bien déterminée, qu'il en existe par exemple un modèle canonique construit par extensions successives de l'anneau Z des entiers relatifs, puis du corps Q des rationnels. Par contre, il ne peut exister un modèle bien déterminé d'anneau principal, la notion pouvant s'appliquer aussi bien à Z, qu'à l'anneau $k[X]$ des polynômes à coefficients dans un corps K, aux anneaux euclidiens... Je me permets de livrer ces réflexions au passage, parce que j'ai longtemps pensé que l'analyse pouvait paraître plus difficile que l'algèbre, et que je n'en suis plus aussi sûr à l'heure actuelle. Mais j'aborde maintenant le principal de mon sujet.

---

[1]) Conférence donnée à la Faculté des Sciences de Poitiers en mars 1967.

[2]) Le mot *d'idéal* n'est-il pas à lui seul un séduisant programme ?

1. Radical de Jacobson d'un anneau

Dans toute la suite, A désigne un anneau commutatif et unitaire. Nous supposons connues la notion d'idéal dans A, d'idéal premier, d'idéal maximal, d'anneau quotient, ainsi que les propriétés suivantes: tout idéal propre[1]) est contenu dans un idéal maximal (théorème de Krull); pour que l'idéal P soit premier, il faut et il suffit que l'anneau quotient A/P soit intègre; pour que l'idéal M soit maximal, il faut et il suffit que l'anneau quotient A/M soit un corps (pour ces définitions et propriétés, se reporter par exemple à [1], [3] ou [8]).

Définition 1. On appelle *radical de Jacobson* de l'anneau A l'intersection R_J de tous les idéaux maximaux M de A:

$$R_I = \cap M,$$

M décrivant l'ensemble de tous les idéaux maximaux.

Les éléments de R_J sont caractérisés par la propriété suivante.

Théorème 1. *Le radical de Jacobson* R_J *de l'anneau* A *est un idéal dont tous les éléments* x *vérifient la propriété.*

(P): 1 − x *est inversible dans* A.

Et c'est le plus grand idéal ayant cette propriété.

En effet, soit $x \in R_J$. Si $1 - x$ n'était pas inversible, l'idéal $A(1 - x)$ constitué par les multiples de $1 - x$ serait propre, donc contenu dans un idéal maximal M. Mais on aurait alors: $x \in M$; $1 - x \in M$, d'où $1 \in M$, ce qui est impossible. Tous les éléments de R_J vérifient donc la propriété (P). D'ailleurs R_J est un idéal comme intersection d'idéaux (maximaux).

Réciproquement, soit I un idéal dont les éléments vérifient la propriété (P). Supposons $I \nsubseteq R_J$. Il existerait un idéal maximal M tel que $I \nsubseteq M$, donc un élément $i \in I$, $i \notin M$. Mais, M étant maximal, on a: $M + Ai = A$, d'où: $1 = m + ai$, $m \in M$, $a \in A$. L'élément ai appartient à I et, d'après la propriété (P), $1 - ai = m$ serait inversible, ce qui est impossible puisque M est propre. On a donc $I \subseteq R_J$.

2. Radical de Jacobson de $k[\mathrm{X}]$

Soit $A = k[\mathrm{X}]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée X et à coefficients dans un corps commutatif quelconque k. Nous allons démontrer que son radical de Jacobson est nul.

---

1) J'appelle idéal propre un idéal différent de A; il ne contient pas l'élément unité 1 de A.

THÉORÈME 2. *Le radical de Jacobson de l'anneau* k [X] *est nul* (ou encore: l'idéal nul est l'intersection de tous les idéaux maximaux de k [X]).

En effet, supposons $F \in R_J$, $F \neq 0$. On a donc:

$$F = b_0 X^n + \ldots + b_n, \quad b_0 \neq 0, \quad n \geqslant 0 .$$

Afin de prendre un polynôme de degré positif, formons: $XF \neq 0$, $XF \in R_J$. Le polynôme $1 - XF$ serait donc inversible dans k [X] d'après le théorème 1, ce qui est impossible puisque son degré est supérieur ou égal à 1.

On démontre exactement de la même façon:

THÉORÈME 2'. *Si* A *est intègre, le radical de Jacobson de l'anneau* A [X] *est nul.*

Application. Soit $F \in k$ [X], $F \neq 0$. D'après le théorème 2, il existe donc un idéal maximal M ne contenant pas F. L'anneau k [X] étant à idéaux principaux, l'idéal $M = A\Psi$ (X) est engendré par un polynôme irréductible sur k:

$$\Psi(X) = X^d + \ldots + a_d, \quad d > 0.$$

L'anneau quotient k [X]/M est un corps K (puisque M est maximal) qui contient un sous-corps isopmorphe à k et que nous identifions avec k; la classe ξ de X est un zéro de Ψ dans ce corps K (qui est l'extension algébrique simple $k(\xi)$). De plus, ce zéro ξ n'annule pas F puisque: $F(\xi) = 0 \Leftrightarrow F(\mathrm{X}) \in M$. Donc:

THÉORÈME 3. *Si* $\mathrm{F} \in \mathrm{K}$ [X], $\mathrm{F} \neq 0$, *il existe toujours* ξ, *algébrique sur* k, *tel que* $\mathrm{F}(\xi) \neq 0$.

A chaque idéal maximal M de $A = k$ [X] est associé le polynôme irréductible $\Psi = X^d + \ldots + a_d$. On peut préciser que ces idéaux maximaux, comme ces polynômes irréductibles, sont en nombre infini.

THÉORÈME 4.

a) *il existe une infinité d'idéaux maximaux dans* k [X].

b) *il existe une infinité de polynômes irréductibles sur* k *dans* k [X].

c) *la clôture algébrique* $\bar{k}$ *de* k *contient une infinité d'éléments.*

En effet, a) résulte de b) d'après la correspondance biunivoque existant entre les idéaux maximaux de k [X] et les polynômes irréductibles sur k.

Démontrons b). S'il n'y avait qu'un nombre fini de polynômes irréductibles $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_h$, on pourrait former le polynôme produit $F = \Psi_1 \Psi_2 \ldots \Psi_h \neq 0$. Il existerait un idéal maximal M ne contenant pas F, soit $M = A\Psi_s$, où Ψ_s est irréductible et figure donc dans les facteurs de F. Il en résulterait $F \in M$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Quant à la partie c) de l'énoncé, supposant connue la notion de clôture algébrique $\bar{k}$ de k (le corps $\bar{k}$ englobe tous les éléments algébriques sur k), il suffit de remarquer que les racines des polynômes irréductibles Ψ_i donnent une infinité d'éléments de $\bar{k}$. En effet, deux polynômes irréductibles Ψ_1 et Ψ_2 différents ne peuvent avoir une racine ξ commune puisque le polynôme Ψ_1 est déterminé par ξ comme base de l'idéal des polynômes de k [X] s'annulant pour ξ. Il y a donc autant (ou plus) d'éléments $\xi \in \bar{k}$ que de polynômes irréductibles Ψ. Remarquons par contre que deux valeurs de ξ différentes peuvent définir le même polynôme Ψ; c'est le cas de i et $-i$ pour l'anneau R [X], qui sont deux racines distinctes du polynôme irréductible $X^2 + 1$.

Ainsi, la notion de radical de Jacobson d'un anneau donne une démonstration simple du théorème 4c, que l'on établit d'habitude par d'autres moyens. Si le corps k possède une infinité d'éléments, par exemple si sa caractéristique est nulle, l'existence d'une infinité d'éléments de $\bar{k}$ est évidente. Par contre, si le corps k a la caractéristique p, par exemple si $k = \{0, 1\}$ est le mini-corps à deux éléments de caractéristique 2, on considère le champ de Galois des racines de l'équation $X^{p^r} - X = 0$, qui possède p^r éléments. Comme r est aussi grand qu'on veut, on voit bien que $\bar{k}$ ne peut avoir un nombre fini d'éléments.

3. Anneau de Jacobson

Dans le cas de l'anneau k [X], tout idéal premier P *non nul* est maximal. Cette propriété tient au fait que l'anneau k [X] est intègre et principal (voir par exemple [10], page 71). Donc, l'idéal premier $P \neq 0$ est égal à l'intersection des idéaux maximaux M qui le contiennent, un tel idéal M étant nécessairement P lui-même. L'idéal nul, qui est premier aussi, est encore l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent d'après le théorème 2. Il en résulte que l'anneau k [X] est un anneau de Jacobson, conformément à la définition suivante:

Définition 2. On appelle *anneau de Jacobson* un anneau intègre A dans lequel tout idéal premier P est égal à l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent.

Nous allons voir que la propriété pour un anneau A d'être un anneau de Jacobson se transfère à l'anneau des polynômes A [X]. On connaît d'autres propriétés simples de transfert de A à A [X], par exemple le caractère « intègre », ou « factoriel ». Par contre, le caractère « principal » ne passe pas: k [X] est principal, mais k [X, Y] ne l'est pas. Nous allons démontrer cette propriété de transfert pour les anneaux de Jacobson.

4. Théorème de transfert

Si A *est un anneau de Jacobson, il en est de même de l'anneau* A [X] *des polynômes à coefficients dans* A.

Il faut donc démontrer que, si $\mathscr{P}$ est un idéal *premier* de A [X], $\mathscr{P}$ est l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent, ou encore:

Théorème 5. *Si $\mathscr{P}$ est un idéal premier propre et si* $\mathrm{F} \notin \mathscr{P}$, *il existe un idéal maximal* M *tel que :* $\mathscr{P} \subseteq \mathrm{M}$, $\mathrm{F} \notin \mathrm{M}$.

Pour étudier les idéaux premiers $\mathscr{P}$ de A [X], nous considérons les idéaux suivants:

$\mathfrak{p} = \mathscr{P} \cap A$: *idéal projection* (ou restriction); c'est un idéal premier propre de A;

$\Pi = A\,[X]\,\mathfrak{p}$: *idéal projetant* (ou extension de $\mathfrak{p}$) engendré par l'idéal $\mathfrak{p}$ dans A [X]. C'est un idéal premier dans $A\,(X)$ formé par les polynômes dont les coefficients sont des éléments de $\mathfrak{p}$.

On a les inclusions suivantes:

$$\mathfrak{p} \subset \Pi \subseteq \mathscr{P}\,.$$

Premier cas : $\mathscr{P} = \Pi$.

L'idéal $\mathscr{P}$ est alors formé des polynômes:

$$a_0 X^n + \ldots + a_n\,, \quad a_i \in \mathfrak{p}\,.$$

Nous allons voir que le théorème 5 est vrai dans ce cas, sans autre hypothèse sur A.

Soit:

$$F(X) = b_0 X^m + \ldots + b_m \notin \Pi\,.$$

On a donc au moins un coefficient b_j qui n'appartient pas à $\mathfrak{p}$ et on peut supposer que c'est le premier b_0.

Considérons l'anneau quotient $A/\mathfrak{p}$, qui est intègre puisque $\mathfrak{p}$ est premier, et l'homomorphisme canonique $\varphi : A \to A/\mathfrak{p}$. Appelons $\varphi\,(a) = \bar{a}$ la classe

de a modulo $\mathfrak{p}$. L'homomorphisme φ peut être étendu à un homomorphisme Φ de l'anneau des polynômes $A[X]$ sur l'anneau des polynômes $A/\mathfrak{p}[X]$. Le noyau de Φ est précisément l'idéal Π. L'image $\bar{F}$ de F est un polynôme non nul de $A/\mathfrak{p}[X]$. On peut donc lui appliquer le théorème 2', et il existe un polynôme maximal $\bar{M}$ de $A/\mathfrak{p}[X]$ qui ne contient pas $\bar{F}$. Son image inverse M par Φ est un polynôme maximal de $A[X]$ qui contient Π et qui ne contient pas F.

Deuxième cas : $\Pi \subset \mathscr{P}$.

Soit k le corps des fractions de l'anneau intègre $A/\mathfrak{p}$ et i l'injection canonique de l'anneau $A/\mathfrak{p}$ dans le corps k. On peut étendre cette injection à une injection I de $A/\mathfrak{p}[X]$ dans $k[X]$. On aura donc, avec l'homomorphisme Φ déjà considéré, le diagramme suivant:

$$A[X] \xrightarrow{\Phi} A/\mathfrak{p}[X] \xrightarrow{I} k[X].$$

L'idéal premier $\mathscr{P}$ de $A[X]$ est alors envoyé par Φ sur un idéal premier non nul de $A/\mathfrak{p}[X]$, qui engendre dans $k[X]$ un idéal premier non nul, donc engendré par un polynôme irréductible sur k que l'on peut prendre sous la forme:

$$\bar{\Psi} = \bar{a}_0 X^d + \ldots + \bar{a}_d, \quad a_0 \notin \mathfrak{p}, \quad d > 0.$$

Tout polynôme $P \in \mathscr{P}$ donne dans $A/\mathfrak{p}[X]$ un polynôme $\bar{P}$ dont la division dans $k[X]$ par $\bar{\Psi}$ conduit à la relation:

$$\bar{a}_0^{\rho} \bar{P} = \bar{B}\bar{\Psi} \quad (\bar{B} \in A/\mathfrak{p}[X],\ \rho \text{ entier}).$$

Cette relation entraîne dans $A[X]$:

$$(1) \qquad a_0^{\rho} P = B\Psi \ (mod\ \Pi), \quad a_0 \notin \mathfrak{p}.$$

Réciproquement, tout polynôme P vérifiant cette relation appartient à $\mathscr{P}$ puisque le second membre est contenu dans $\mathscr{P}$, que $\mathscr{P}$ est premier, et que $a_0 \notin \mathscr{P}$. Les polynômes de l'idéal premier $\mathscr{P}$ sont donc caractérisés par la relation (1).

Considérons maintenant le polynôme $F \notin \mathscr{P}$. On aura donc $\bar{F} \notin \bar{\mathscr{P}}$ et, dans $k[X]$, les polynômes $\bar{\Psi}$ et $\bar{F}$ seront premiers entre eux. Ils vérifient donc l'égalité de Bezout dans $k[X]$, qui donne dans $A/\mathfrak{p}[X]$ en chassant le dénominateur:

$$\bar{U}\bar{F} + \bar{V}\bar{\Psi} = \bar{u}, \quad u \in A, \quad u \notin \mathfrak{p}$$

d'où, dans $A[X]$:

$$(2) \qquad UF + V\Psi = u \ (mod\ \Pi), \qquad u \notin \mathfrak{p}$$

Prenons alors, avec l'hypothèse faite sur l'anneau A, un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A contenant $\mathfrak{p}$ et ne contenant pas $ua_0 \notin \mathfrak{p}$.

On vérifie aisément que l'idéal I engendré par $\mathfrak{m}$ et Ψ dans $A[X]$ a pour projection $\mathfrak{m}$ dans A. En effet: $\Psi = a_0 X^d + \ldots + a^d$ est tel que $a_0 \notin \mathfrak{m}$ puisque $ua_0 \notin \mathfrak{m}$. Soit alors une égalité de la forme:

$$v = L\Psi \ (mod\ A[X]\mathfrak{m}), \qquad v \in A.$$

En prenant les coefficients modulo $\mathfrak{m}$, c'est-à-dire en opérant dans le corps $A/\mathfrak{m}$ et l'anneau $A/\mathfrak{m}[X]$, on remarque que le deuxième membre, s'il n'est pas nul, a un degré positif, tandis que le premier aurait un degré nul. On a donc $v = 0 \pmod{\mathfrak{m}}$, ou $v \in \mathfrak{m}$.

Considérons un idéal maximal M contenant I. Sa projection $M \cap A$ contient l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et elle est donc égale $\mathfrak{m}$. Il en résulte que $ua_0 \notin M$. Par suite, M contient l'idéal premier $\mathscr{P}$ d'après (1) et ne peut contenir le polynôme F d'après (2).

Le théorème est établi. Le résultat est dû à W. Krull [6]. La démonstration donnée ici est inspirée de [7].

A propos de cette démonstration, on peut se poser le problème suivant:

Problème : La projection d'un idéal maximal M de $A[X]$ est-elle un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A ?

La réponse n'est pas évidente pour un anneau de Jacobson quelconque.

On peut démontrer au moyen de la théorie de la dimension qu'elle est affirmative dans le cas d'un anneau de polynômes $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ à n indéterminées sur un corps k. Cet anneau est un anneau de Jacobson particulier: en effet, $k[X_1]$ étant un anneau de Jacobson, ainsi qu'on l'a remarqué au début du paragraphe 3, le théorème de transfert peut s'appliquer. On peut donc énoncer le résultat suivant:

Théorème 6. k *étant un corps commutatif quelconque, l'anneau de polynômes* $\mathrm{k}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ *est un anneau de Jacobson.*

5. Le théorème des zéros de Hilbert

Considérons un idéal premier propre $\mathscr{P}$ de l'anneau de polynômes $\mathrm{k}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$, k étant un corps quelconque. Soit $\bar{k}$ la clôture algébrique de k; nous prendrons les zéros des polynômes $f \in k[X, \ldots, X_n]$ dans l'espace

affine $\bar{k}^n$. Un zéro de f est donc un point $M = (x, ..., x_n)$; $x_i \in \bar{k}$, tel que $f(M) = f(x_1, ..., x_n) = 0$. Par exemple, si $k = R$ est le corps des réels, on a $\bar{k} = C$ et les zéros des polynômes (à coefficients réels) sont pris dans l'espace affine C^n des points à coordonnées complexes.

Définition 3. On appelle *zéro de l'idéal* $\mathscr{P}$, algébrique sur k, un point de $\bar{k}^n$ qui annule tous les polynômes de l'idéal $\mathscr{P}$.

Définition 4. On appelle *variété algébrique* $V(\mathscr{P})$ de l'idéal premier $\mathscr{P}$ l'ensemble des zéros de $\mathscr{P}$; on a donc:

$$V(\mathscr{P}) = \{ M \in \bar{k}^n \mid f(M) = 0 \quad \forall f \in \mathscr{P} \}.$$

Le théorème des zéros de Hilbert (Hilbertscher Nullstellensatz) s'énonce alors:

THÉORÈME 7. *$\mathscr{P}$ étant un idéal premier propre de l'anneau* k $[X_1, X_2, ..., X_n]$, *et* F *un polynôme n'appartenant pas à $\mathscr{P}$, il existe un zéro de $\mathscr{P}$, algébrique sur* k, *qui n'annule pas* F.

La démonstration se fait comme pour le théorème de transfert, avec en plus un support géométrique utile donné par la notion de variété algébrique.

Raisonnons par récurrence sur n.

Si $n = 1$, on considère l'idéal premier $\mathscr{P}$ dans $k[X]$, et le polynôme $F \notin \mathscr{P}$. Dans le cas $\mathscr{P} = 0$, l'existence d'un zéro de $\mathscr{P}$ algébrique que k, qui n'annule pas F, est assurée par le théorème 3. Dans le cas $\mathscr{P} \neq 0$, on a $\mathscr{P} = (\Psi)$, où Ψ est un polynôme irréductible sur k et on applique la démonstration donnée pour le théorème 3.

Supposons le théorème établi pour $n - 1$ et démontrons le pour n. En posant $A = k[X_1, ..., X_{n-1}]$ et $X_n = X$, on étudie l'idéal premier $\mathscr{P}$ dans $A[X]$ comme dans le théorème de transfert (§ 4). L'idéal premier $\mathscr{P}$ a pour variété algébrique $V(\mathscr{P})$ dans l'espace affine $\bar{k}^n$, et l'idéal projection $\mathscr{P} \cap A = \mathfrak{p}$ a pour variété $V(\mathfrak{p})$ dans l'espace affine $\bar{k}^{n-1}$. L'idéal projetant Π engendré par $\mathfrak{p}$ dans $A[X]$ a pour variété un cylindre qui contient $V(\mathscr{P})$ et $V(\mathfrak{p})$ [1]).

Premier cas : $\mathscr{P} = \Pi$.

Soit:

$$F = b_0 X^m + ... + b_m \notin \Pi, b_0 \notin \mathfrak{p}.$$

---

[1]) $V(\mathfrak{p})$ contient la projection ensembliste de $V(\mathfrak{P})$ mais peut la contenir strictement. Exemple: $\mathfrak{P} = (XY - 1)$ dans $k[X, Y]$ a pour variété une hyperbole qui se projette sur OX suivant l'axe $X'OX - \{0\}$, alors que $\mathfrak{p} = 0$ a pour variété $V(\mathfrak{p}) = X'OX$.

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un zéro $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ de $\mathfrak{p}$, donc de Π, algébrique sur k, qui n'annule pas b_0.

Les racines de l'équation:

$$(3) \qquad b_0(x_1, \ldots, x_{n-1}) X^m + \ldots + b_m(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0,$$

sont en nombre fini et on peut donc choisir dans $\bar{k}$, qui est infini d'après le théorème 4c, un élément x_n qui n'est pas une racine de l'équation (3). Le point $M = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ sera donc un zéro algébrique sur k de $\mathscr{P}$ qui n'annule pas F.

Deuxième cas : $\Pi \subset \mathscr{P}$.

Reprenons les relations du paragraphe 4:

$$(1) \qquad a_0^p P = B\Psi \ (mod\ \Pi), \qquad a_0 \notin \mathfrak{p},$$

$$(2) \qquad UF + V\Psi = u \ (mod\ \Pi), \qquad u \in \mathfrak{p},$$

avec

$$\Psi = a_0 X^d + \ldots + a_d, \qquad a_0 \notin \mathfrak{p}, \qquad d > 0.$$

Prenons, d'après l'hypothèse de récurrence, un zéro $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ de $\mathfrak{p}$, algébrique sur k, qui n'annule pas $ua_0 \notin \mathfrak{p}$. Choisissons pour x_n une racine de l'équation:

$$\Psi(x_1, \ldots, x_{n-1}, X) = a_0(x_1, \ldots, x_{n-1}) X^d + \ldots + a_d(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0.$$

Le point $M = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ est alors un zéro de tout polynôme $P \in \mathscr{P}$ d'après (1), et ce zéro ne peut annuler F d'après (2). Le théorème est donc établi.

Pour comprendre la signification du théorème des zéros de Hilbert en géométrie algébrique, considérons l'idéal $J(V(\mathscr{P}))$ qui est l'ensemble des polynômes de l'anneau $k[X_1, \ldots, X_n]$ s'annulant en tous les points de $V(\mathscr{P})$:

$$J(V(\mathscr{P})) = \{f \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid f(M) = 0 \quad \forall M \in V(\mathscr{P})\}.$$

D'après la définition 4 de $V(\mathscr{P})$, on a évidemment:

$$J(V(\mathscr{P})) \supseteq \mathscr{P}.$$

Supposons que l'inclusion soit stricte; il existerait donc $F \in J$ et $F \notin \mathscr{P}$. Mais le théorème des zéros de Hilbert entraînerait l'existence d'un point $M \in V(\mathscr{P})$ tel que $F(M) \neq 0$, ce qui contredit la propriété $F \in J$. On a donc:

$$\boxed{J(V(\mathscr{P})) = \mathscr{P}.}$$

Ce résultat exprime que *tout idéal premier propre dans* k $[X_1, ..., X_n]$ *est l'idéal des polynômes qui s'annulent en ses zéros algébriques sur* k; un idéal premier est donc défini par ses zéros algébriques sur k. Un idéal maximal coïncide avec l'idéal des polynômes qui s'annulent en un point $M \in \bar{k}^n$ (ils peuvent s'annuler en d'autres points, qui sont en nombre fini, et qu'on appelle les conjugués de M sur k).

Du théorème 7 on déduit d'autres variantes pour le théorème des zéros de Hilbert, par exemple:

THÉORÈME 8. *Si un idéal* I *dans* $A = k[X_1, ..., X_n]$ *n'a pas de zéros algébriques sur* k, *cet idéal est impropre :* $I = A$.

En effet, si l'idéal I était propre, il serait contenu dans un idéal maximal M, donc premier. Il existerait un polynôme $F \notin M$ et un zéro de M donc de J, qui n'annulerait pas F.

Sous une forme plus élémentaire, le théorème 8 exprime le résultat suivant: *si le système d'équations :*

$$f_i(X_1, ..., X_n) = 0 ; \qquad i = 1, 2, ..., p ,$$

avec

$$f_i \in k[X_1, ..., X_n] ,$$

n'a pas de solutions dans la clôture algébrique $\bar{k}$, *il existe des polynômes* $A_i \in k[X_1, ..., X_n]$ *tels que :*

$$\sum_{i=1}^{p} A_i f_i = 1 .$$

Signalons encore la conséquence:

THÉORÈME 9. *Si un polynôme* $F \in k[X_1, ..., X_n]$ *s'annule pour tous les zéros algébriques sur* k *d'un idéal* I *de* $k[X_1, ..., X_n]$, *il existe un entier* ρ *positif tel que :*

$$f^\rho \in I .$$

(Démonstration élémentaire de RABINOVITCH, à partir du théorème 8, exposée par exemple dans [9], p. 4, ou [10], tome II, p. 102.)

6. ANNEAUX RÉGULIERS

Le problème intervenant dans la définition d'un anneau de Jacobson est celui de la représentation d'un idéal premier comme intersection des idéaux maximaux qui le contiennent. On peut exiger davantage:

Problème 2. Quels sont les anneaux (commutatifs et unitaires) tels que tout idéal soit l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent?

Dans un tel anneau, on a nécessairement:

$$(4) \qquad Aa^2 = Aa\,, \qquad \forall a \in A\,,$$

car les idéaux maximaux qui contiennent a sont identiques à ceux qui contiennent a^2; leur intersection est donc la même pour l'idéal engendré par a et pour l'idéal engendré par a^2. La relation (4) s'écrit encore:

$$(5) \qquad \forall a \in A\,, \qquad \exists x \in A \quad \textit{tel que:} \quad a = xa^2 = axa\,.$$

Définition 5. Un anneau vérifiant la propriété (5) s'appelle un anneau *régulier* (au sens de J. Von NEUMANN).

Les anneaux qui sont solution du problème 2 sont donc réguliers.

Réciproquement, un anneau régulier est solution du problème 2. Démontrons d'abord que le radical de Jacobson de l'anneau régulier A est nul. Si $a \in R_J$, l'égalité:

$$a\,(1 - xa) = 0\,,$$

entraîne $a = 0$ car $1 - xa$ est inversible d'après le théorème 1. On démontre de même que le radical de Jacobson de l'anneau quotient A/I est nul, I étant un idéal quelconque. Il en résulte que l'idéal I est l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent.

On a donc démontré le théorème suivant:

THÉORÈME 10. *Pour qu'un anneau soit solution du problème 2, il faut et il suffit qu'il soit régulier.*

Remarquons qu'un anneau régulier intègre est un corps et que, dans un anneau régulier, tout idéal premier est maximal.

7. LE PROBLÈME DE LA SYNTHÈSE SPECTRALE

Il est remarquable que certains problèmes fondamentaux de l'Analyse admettent une formulation algébrique empruntée à la théorie des idéeaux et aux idéaux maximaux. Je citerai *le problème de la synthèse spectrale.* En analyse, on fait intervenir, outre la structure d'anneau, une structure topologique. Les idéaux les plus intéressants sont les idéaux fermés, d'autant plus que tout idéal maximal est fermé. Le problème de la synthèse

spectrale dans une algèbre de Banach [1]) commutative s'énonce alors sous la forme suivante:

tout idéal I *fermé est-il l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent?*

La réponse est affirmative dans certains cas généraux, par exemple pour l'algèbre $C(X)$ des fonctions continues à valeurs complexes définies sur un espace compact ([4], page 51). En d'autres termes, à tout idéal fermé I dans $C(X)$ correspond un sous-ensemble fermé S de X tel que I coïncide avec les fonctions continues sur X qui s'annulent sur S. Nous avons donc une situation analogue à celle qui découle du théorème des zéros de Hilbert pour les idéaux premiers de $K[X_1, ..., X_n]$.

Par contre, la réponse est négative pour l'algèbre $L_1(R)$ des fonctions à valeurs complexes intégrables au sens de Lebesgue sur toute la droite réelle, deux fonctions égales presque partout étant identifiées, la multiplication étant définie par le produit de convolution:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt\,,$$

et la norme étant la L_1 — norme définie par:

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx\,.$$

Un contre-exemple au problème de la synthèse spectrale a été donné par MALLIAVIN, qui a donné aussi un contre-exemple montrant que la réponse est encore négative pour l'algèbre A des séries de Fourier absolument convergentes:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}\,, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty\,,$$

le produit étant défini par:

$$(fg)(x) = f(x)\, g(x)$$

et la norme $\|f\|$ par la deuxième somme écrite plus haut.

En conclusion, nous voyons par tous les exemples abordés ici, que la théorie des idéaux d'un anneau, et en particulier la représentation de certains idéaux comme l'intersection des idéaux maximaux qui les contiennent, est d'une grande importance en algèbre et dans d'autres branches des Mathématiques.

---

1) Algèbre A sur le corps des réels ou des complexes, normée de façon que $\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|$, quel que soient $x, y \in A$, et complète pour la topologie d'espace vectoriel normé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki, *Algèbre, 1, Structures algébriques* (Paris, Hermann).
[2] —— *Algèbre, ., Modules et anneaux semi-simples* (Paris, Hermann).
[3] P. Dubreil et M. L. Dubreil-Jacotin, *Lecons d'algèbre moderne* (Paris, Dunod, 2e édition, 1964).
[4] K. Hoffman, *Fundamentals of Banach algebras* (Instituto de Matematica da Universidade do Paranà; Curitiba, 1962).
[5] N. Jacobson, Structure of rings (*Amer. Math. Soc. Colloquium publications*, vol. 37, 2e édition, 1964).
[6] W. Krull, Jacobsonsche Ringe, Hilbertscher Nullstellensatz, Dimension Theorie (*Math. Zeit.*, t. 54, pp. 354-387).
[7] L. Lesieur, Un théorème de transfert d'un anneau abstrait à l'anneau des polynômes (*Journ. Canadien de Mathématiques*, vol. 2, n° 1, 1950, pp. 50 à 65).
[8] A. et G. Revuz, *Le cours de l'A.P.M.*, tome I, Algèbre (A.P.M.E.P., 29 rue d'Ulm, Paris 5e).
[9] P. Samuel, *Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique* (Ergebnisse der Math.; Springer-Verlag, 1955).
[10] B. L. Van der Waerden, *Algebra, II* (Math. Wissenschaften, 34, Springer-Verlag, 4e éd., 1959).

Prof. L. Lesieur
Faculté des Sciences
de l'Université de Paris
Orsay.

vide-leer-empty