

1. Radical de Jacobson d'un anneau

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

1. RADICAL DE JACOBSON D'UN ANNEAU

Dans toute la suite, A désigne un anneau commutatif et unitaire. Nous supposons connues la notion d'idéal dans A , d'idéal premier, d'idéal maximal, d'anneau quotient, ainsi que les propriétés suivantes: tout idéal propre¹⁾ est contenu dans un idéal maximal (théorème de Krull); pour que l'idéal P soit premier, il faut et il suffit que l'anneau quotient A/P soit intègre; pour que l'idéal M soit maximal, il faut et il suffit que l'anneau quotient A/M soit un corps (pour ces définitions et propriétés, se reporter par exemple à [1], [3] ou [8]).

Définition 1. On appelle *radical de Jacobson* de l'anneau A l'intersection R_J de tous les idéaux maximaux M de A :

$$R_J = \bigcap M,$$

M décrivant l'ensemble de tous les idéaux maximaux.

Les éléments de R_J sont caractérisés par la propriété suivante.

THÉORÈME 1. *Le radical de Jacobson R_J de l'anneau A est un idéal dont tous les éléments x vérifient la propriété.*

(P): $1 - x$ est inversible dans A .

Et c'est le plus grand idéal ayant cette propriété.

En effet, soit $x \in R_J$. Si $1 - x$ n'était pas inversible, l'idéal $A(1 - x)$ constitué par les multiples de $1 - x$ serait propre, donc contenu dans un idéal maximal M . Mais on aurait alors: $x \in M$; $1 - x \in M$, d'où $1 \in M$, ce qui est impossible. Tous les éléments de R_J vérifient donc la propriété (P). D'ailleurs R_J est un idéal comme intersection d'idéaux (maximaux).

Réciproquement, soit I un idéal dont les éléments vérifient la propriété (P). Supposons $I \not\subseteq R_J$. Il existerait un idéal maximal M tel que $I \not\subseteq M$, donc un élément $i \in I$, $i \notin M$. Mais, M étant maximal, on a: $M + Ai = A$, d'où: $1 = m + ai$, $m \in M$, $a \in A$. L'élément ai appartient à I et, d'après la propriété (P), $1 - ai = m$ serait inversible, ce qui est impossible puisque M est propre. On a donc $I \subseteq R_J$.

2. RADICAL DE JACOBSON DE $k[X]$

Soit $A = k[X]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée X et à coefficients dans un corps commutatif quelconque k . Nous allons démontrer que son radical de Jacobson est nul.

¹⁾ J'appelle idéal propre un idéal différent de A ; il ne contient pas l'élément unité 1 de A .