2. Radical de Jacobson de k [X]

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

1. Radical de Jacobson d'un anneau

Dans toute la suite, A désigne un anneau commutatif et unitaire. Nous supposons connues la notion d'idéal dans A, d'idéal premier, d'idéal maximal, d'anneau quotient, ainsi que les propriétés suivantes: tout idéal propre [1]) est contenu dans un idéal maximal (théorème de Krull); pour que l'idéal P soit premier, il faut et il suffit que l'anneau quotient A/P soit intègre; pour que l'idéal M soit maximal, il faut et il suffit que l'anneau quotient A/M soit un corps (pour ces définitions et propriétés, se reporter par exemple à [1], [3] ou [8]).

Définition 1. On appelle *radical de Jacobson* de l'anneau A l'intersection R_J de tous les idéaux maximaux M de A:

$$R_J = \cap M,$$

M décrivant l'ensemble de tous les idéaux maximaux.

Les éléments de R_J sont caractérisés par la propriété suivante.

Théorème 1. *Le radical de Jacobson* R_J *de l'anneau* A *est un idéal dont tous les éléments* x *vérifient la propriété.*

(P): $1 - \mathrm{x}$ *est inversible dans* A.

Et c'est le plus grand idéal ayant cette propriété.

En effet, soit $x \in R_J$. Si $1 - x$ n'était pas inversible, l'idéal $A(1 - x)$ constitué par les multiples de $1 - x$ serait propre, donc contenu dans un idéal maximal M. Mais on aurait alors: $x \in M$; $1 - x \in M$, d'où $1 \in M$, ce qui est impossible. Tous les éléments de R_J vérifient donc la propriété (P). D'ailleurs R_J est un idéal comme intersection d'idéaux (maximaux).

Réciproquement, soit I un idéal dont les éléments vérifient la propriété (P). Supposons $I \nsubseteq R_J$. Il existerait un idéal maximal M tel que $I \nsubseteq M$, donc un élément $i \in I$, $i \notin M$. Mais, M étant maximal, on a: $M + Ai = A$, d'où: $1 = m + ai$, $m \in M$, $a \in A$. L'élément ai appartient à I et, d'après la propriété (P), $1 - ai = m$ serait inversible, ce qui est impossible puisque M est propre. On a donc $I \subseteq R_J$.

2. Radical de Jacobson de $k[X]$

Soit $A = k[X]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée X et à coefficients dans un corps commutatif quelconque k. Nous allons démontrer que son radical de Jacobson est nul.

---

1) J'appelle idéal propre un idéal différent de A; il ne contient pas l'élément unité 1 de A.

THÉORÈME 2. *Le radical de Jacobson de l'anneau* k [X] *est nul* (ou encore: l'idéal nul est l'intersection de tous les idéaux maximaux de k [X]).

En effet, supposons $F \in R_J$, $F \neq 0$. On a donc:

$$F = b_0 X^n + \ldots + b_n, \quad b_0 \neq 0, \quad n \geqslant 0 .$$

Afin de prendre un polynôme de degré positif, formons: $XF \neq 0$, $XF \in R_J$. Le polynôme $1 - XF$ serait donc inversible dans k [X] d'après le théorème 1, ce qui est impossible puisque son degré est supérieur ou égal à 1.

On démontre exactement de la même façon:

THÉORÈME 2'. *Si* A *est intègre, le radical de Jacobson de l'anneau* A [X] *est nul.*

Application. Soit $F \in k$ [X], $F \neq 0$. D'après le théorème 2, il existe donc un idéal maximal M ne contenant pas F. L'anneau k [X] étant à idéaux principaux, l'idéal $M = A\Psi$ (X) est engendré par un polynôme irréductible sur k:

$$\Psi(X) = X^d + \ldots + a_d , \quad d > 0.$$

L'anneau quotient k [X]$/M$ est un corps K (puisque M est maximal) qui contient un sous-corps isopmorphe à k et que nous identifions avec k; la classe ξ de X est un zéro de Ψ dans ce corps K (qui est l'extension algébrique simple k (ξ)). De plus, ce zéro ξ n'annule pas F puisque: $F(\xi) = 0 \Leftrightarrow F$ (X) $\in M$. Donc:

THÉORÈME 3. *Si* F $\in$ K [X], F $\neq 0$, *il existe toujours* ξ, *algébrique sur* k, *tel que* F (ξ) $\neq 0$.

A chaque idéal maximal M de $A = k$ [X] est associé le polynôme irréductible $\Psi = X^d + \ldots + a_d$. On peut préciser que ces idéaux maximaux, comme ces polynômes irréductibles, sont en nombre infini.

THÉORÈME 4.

a) *il existe une infinité d'idéaux maximaux dans* k [X].

b) *il existe une infinité de polynômes irréductibles sur* k *dans* k [X].

c) *la clôture algébrique* $\bar{k}$ *de* k *contient une infinité d'éléments.*

En effet, a) résulte de b) d'après la correspondance biunivoque existant entre les idéaux maximaux de k [X] et les polynômes irréductibles sur k.

Démontrons b). S'il n'y avait qu'un nombre fini de polynômes irréductibles $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_h$, on pourrait former le polynôme produit $F = \Psi_1 \Psi_2 \ldots \Psi_h \neq 0$. Il existerait un idéal maximal M ne contenant pas F, soit $M = A\Psi_s$, où Ψ_s est irréductible et figure donc dans les facteurs de F. Il en résulterait $F \in M$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Quant à la partie c) de l'énoncé, supposant connue la notion de clôture algébrique $\bar{k}$ de k (le corps $\bar{k}$ englobe tous les éléments algébriques sur k), il suffit de remarquer que les racines des polynômes irréductibles Ψ_i donnent une infinité d'éléments de $\bar{k}$. En effet, deux polynômes irréductibles Ψ_1 et Ψ_2 différents ne peuvent avoir une racine ξ commune puisque le polynôme Ψ_1 est déterminé par ξ comme base de l'idéal des polynômes de k [X] s'annulant pour ξ. Il y a donc autant (ou plus) d'éléments $\xi \in \bar{k}$ que de polynômes irréductibles Ψ. Remarquons par contre que deux valeurs de ξ différentes peuvent définir le même polynôme Ψ; c'est le cas de i et $-i$ pour l'anneau R [X], qui sont deux racines distinctes du polynôme irréductible $X^2 + 1$.

Ainsi, la notion de radical de Jacobson d'un anneau donne une démonstration simple du théorème 4c, que l'on établit d'habitude par d'autres moyens. Si le corps k possède une infinité d'éléments, par exemple si sa caractéristique est nulle, l'existence d'une infinité d'éléments de $\bar{k}$ est évidente. Par contre, si le corps k a la caractéristique p, par exemple si $k = \{0, 1\}$ est le mini-corps à deux éléments de caractéristique 2, on considère le champ de Galois des racines de l'équation $X^{p^r} - X = 0$, qui possède p^r éléments. Comme r est aussi grand qu'on veut, on voit bien que $\bar{k}$ ne peut avoir un nombre fini d'éléments.

3. Anneau de Jacobson

Dans le cas de l'anneau k [X], tout idéal premier P *non nul* est maximal. Cette propriété tient au fait que l'anneau k [X] est intègre et principal (voir par exemple [10], page 71). Donc, l'idéal premier $P \neq 0$ est égal à l'intersection des idéaux maximaux M qui le contiennent, un tel idéal M étant nécessairement P lui-même. L'idéal nul, qui est premier aussi, est encore l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent d'après le théorème 2. Il en résulte que l'anneau k [X] est un anneau de Jacobson, conformément à la définition suivante:

Définition 2. On appelle *anneau de Jacobson* un anneau intègre A dans lequel tout idéal premier P est égal à l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent.