3. Anneau de Jacobson

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Démontrons b). S'il n'y avait qu'un nombre fini de polynômes irréductibles $\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_h$, on pourrait former le polynôme produit $F = \Psi_1 \Psi_2 ... \Psi_h \neq 0$. Il existerait un idéal maximal M ne contenant pas F, soit $M = A\Psi_s$, où Ψ_s est irréductible et figure donc dans les facteurs de F. Il en résulterait $F \in M$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Quant à la partie c) de l'énoncé, supposant connue la notion de clôture algébrique $\bar{k}$ de k (le corps $\bar{k}$ englobe tous les éléments algébriques sur k), il suffit de remarquer que les racines des polynômes irréductibles Ψ_i donnent une infinité d'éléments de $\bar{k}$. En effet, deux polynômes irréductibles Ψ_1 et Ψ_2 différents ne peuvent avoir une racine ξ commune puisque le polynôme Ψ_1 est déterminé par ξ comme base de l'idéal des polynômes de k [X] s'annulant pour ξ. Il y a donc autant (ou plus) d'éléments $\xi \in \bar{k}$ que de polynômes irréductibles Ψ. Remarquons par contre que deux valeurs de ξ différentes peuvent définir le même polynôme Ψ; c'est le cas de i et $-i$ pour l'anneau R [X], qui sont deux racines distinctes du polynôme irréductible $X^2 + 1$.

Ainsi, la notion de radical de Jacobson d'un anneau donne une démonstration simple du théorème 4c, que l'on établit d'habitude par d'autres moyens. Si le corps k possède une infinité d'éléments, par exemple si sa caractéristique est nulle, l'existence d'une infinité d'éléments de $\bar{k}$ est évidente. Par contre, si le corps k a la caractéristique p, par exemple si $k = \{0, 1\}$ est le mini-corps à deux éléments de caractéristique 2, on considère le champ de Galois des racines de l'équation $X^{p^r} - X = 0$, qui possède p^r éléments. Comme r est aussi grand qu'on veut, on voit bien que $\bar{k}$ ne peut avoir un nombre fini d'éléments.

3. Anneau de Jacobson

Dans le cas de l'anneau k [X], tout idéal premier P *non nul* est maximal. Cette propriété tient au fait que l'anneau k [X] est intègre et principal (voir par exemple [10], page 71). Donc, l'idéal premier $P \neq 0$ est égal à l'intersection des idéaux maximaux M qui le contiennent, un tel idéal M étant nécessairement P lui-même. L'idéal nul, qui est premier aussi, est encore l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent d'après le théorème 2. Il en résulte que l'anneau k [X] est un anneau de Jacobson, conformément à la définition suivante:

Définition 2. On appelle *anneau de Jacobson* un anneau intègre A dans lequel tout idéal premier P est égal à l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent.

Nous allons voir que la propriété pour un anneau A d'être un anneau de Jacobson se transfère à l'anneau des polynômes $A\,[X]$. On connaît d'autres propriétés simples de transfert de A à $A\,[X]$, par exemple le caractère « intègre », ou « factoriel ». Par contre, le caractère « principal » ne passe pas: $k\,[X]$ est principal, mais $k\,[X, Y]$ ne l'est pas. Nous allons démontrer cette propriété de transfert pour les anneaux de Jacobson.

4. Théorème de transfert

Si A *est un anneau de Jacobson, il en est de même de l'anneau* A [X] *des polynômes à coefficients dans* A.

Il faut donc démontrer que, si $\mathscr{P}$ est un idéal *premier* de $A\,[X]$, $\mathscr{P}$ est l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent, ou encore:

Théorème 5. *Si* $\mathscr{P}$ *est un idéal premier propre et si* $\mathrm{F} \notin \mathscr{P}$, *il existe un idéal maximal* M *tel que :* $\mathscr{P} \subseteq \mathrm{M}$, $\mathrm{F} \notin \mathrm{M}$.

Pour étudier les idéaux premiers $\mathscr{P}$ de $A\,[X]$, nous considérons les idéaux suivants:

$\mathfrak{p} = \mathscr{P} \cap A$: *idéal projection* (ou restriction); c'est un idéal premier propre de A;

$\Pi = A\,[X]\,\mathfrak{p}$: *idéal projetant* (ou extension de $\mathfrak{p}$) engendré par l'idéal $\mathfrak{p}$ dans $A\,[X]$. C'est un idéal premier dans $A\,(X)$ formé par les polynômes dont les coefficients sont des éléments de $\mathfrak{p}$.

On a les inclusions suivantes:

$$\mathfrak{p} \subset \Pi \subseteq \mathscr{P}\,.$$

Premier cas : $\mathscr{P} = \Pi$.

L'idéal $\mathscr{P}$ est alors formé des polynômes:

$$a_0 X^n + \dots + a_n\,, \quad a_i \in \mathfrak{p}\,.$$

Nous allons voir que le théorème 5 est vrai dans ce cas, sans autre hypothèse sur A.

Soit:

$$F(X) = b_0 X^m + \dots + b_m \notin \Pi\,.$$

On a donc au moins un coefficient b_j qui n'appartient pas à $\mathfrak{p}$ et on peut supposer que c'est le premier b_0.

Considérons l'anneau quotient $A/\mathfrak{p}$, qui est intègre puisque $\mathfrak{p}$ est premier, et l'homomorphisme canonique $\varphi : A \to A/\mathfrak{p}$. Appelons $\varphi\,(a) = \bar{a}$ la classe