

3. Anneau de Jacobson

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Démontrons b). S'il n'y avait qu'un nombre fini de polynômes irréductibles $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_h$, on pourrait former le polynôme produit $F = \Psi_1 \Psi_2 \dots \Psi_h \neq 0$. Il existerait un idéal maximal M ne contenant pas F , soit $M = A\Psi_s$, où Ψ_s est irréductible et figure donc dans les facteurs de F . Il en résulterait $F \in M$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Quant à la partie c) de l'énoncé, supposant connue la notion de clôture algébrique \bar{k} de k (le corps \bar{k} englobe tous les éléments algébriques sur k), il suffit de remarquer que les racines des polynômes irréductibles Ψ_i donnent une infinité d'éléments de \bar{k} . En effet, deux polynômes irréductibles Ψ_1 et Ψ_2 différents ne peuvent avoir une racine ξ commune puisque le polynôme Ψ_1 est déterminé par ξ comme base de l'idéal des polynômes de $k[X]$ s'annulant pour ξ . Il y a donc autant (ou plus) d'éléments $\xi \in \bar{k}$ que de polynômes irréductibles Ψ . Remarquons par contre que deux valeurs de ξ différentes peuvent définir le même polynôme Ψ ; c'est le cas de i et $-i$ pour l'anneau $R[X]$, qui sont deux racines distinctes du polynôme irréductible $X^2 + 1$.

Ainsi, la notion de radical de Jacobson d'un anneau donne une démonstration simple du théorème 4c, que l'on établit d'habitude par d'autres moyens. Si le corps k possède une infinité d'éléments, par exemple si sa caractéristique est nulle, l'existence d'une infinité d'éléments de \bar{k} est évidente. Par contre, si le corps k a la caractéristique p , par exemple si $k = \{0, 1\}$ est le mini-corps à deux éléments de caractéristique 2, on considère le champ de Galois des racines de l'équation $X^{p^r} - X = 0$, qui possède p^r éléments. Comme r est aussi grand qu'on veut, on voit bien que \bar{k} ne peut avoir un nombre fini d'éléments.

3. ANNEAU DE JACOBSON

Dans le cas de l'anneau $k[X]$, tout idéal premier P non nul est maximal. Cette propriété tient au fait que l'anneau $k[X]$ est intègre et principal (voir par exemple [10], page 71). Donc, l'idéal premier $P \neq 0$ est égal à l'intersection des idéaux maximaux M qui le contiennent, un tel idéal M étant nécessairement P lui-même. L'idéal nul, qui est premier aussi, est encore l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent d'après le théorème 2. Il en résulte que l'anneau $k[X]$ est un anneau de Jacobson, conformément à la définition suivante:

Définition 2. On appelle *anneau de Jacobson* un anneau intègre A dans lequel tout idéal premier P est égal à l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent.

Nous allons voir que la propriété pour un anneau A d'être un anneau de Jacobson se transfère à l'anneau des polynômes $A[X]$. On connaît d'autres propriétés simples de transfert de A à $A[X]$, par exemple le caractère « intègre », ou « factoriel ». Par contre, le caractère « principal » ne passe pas: $k[X]$ est principal, mais $k[X, Y]$ ne l'est pas. Nous allons démontrer cette propriété de transfert pour les anneaux de Jacobson.

4. THÉORÈME DE TRANSFERT

Si A est un anneau de Jacobson, il en est de même de l'anneau $A[X]$ des polynômes à coefficients dans A .

Il faut donc démontrer que, si \mathcal{P} est un idéal premier de $A[X]$, \mathcal{P} est l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent, ou encore:

THÉORÈME 5. *Si \mathcal{P} est un idéal premier propre et si $F \notin \mathcal{P}$, il existe un idéal maximal M tel que : $\mathcal{P} \subseteq M$, $F \notin M$.*

Pour étudier les idéaux premiers \mathcal{P} de $A[X]$, nous considérons les idéaux suivants:

$\mathfrak{p} = \mathcal{P} \cap A$: idéal projection (ou restriction); c'est un idéal premier propre de A ;

$\Pi = A[X]_{\mathfrak{p}}$: idéal projetant (ou extension de \mathfrak{p}) engendré par l'idéal \mathfrak{p} dans $A[X]$. C'est un idéal premier dans $A(X)$ formé par les polynômes dont les coefficients sont des éléments de \mathfrak{p} .

On a les inclusions suivantes:

$$\mathfrak{p} \subset \Pi \subseteq \mathcal{P}.$$

Premier cas : $\mathcal{P} = \Pi$.

L'idéal \mathcal{P} est alors formé des polynômes:

$$a_0 X^n + \dots + a_n, \quad a_i \in \mathfrak{p}.$$

Nous allons voir que le théorème 5 est vrai dans ce cas, sans autre hypothèse sur A .

Soit:

$$F(X) = b_0 X^m + \dots + b_m \notin \Pi.$$

On a donc au moins un coefficient b_j qui n'appartient pas à \mathfrak{p} et on peut supposer que c'est le premier b_0 .

Considérons l'anneau quotient A/\mathfrak{p} , qui est intègre puisque \mathfrak{p} est premier, et l'homomorphisme canonique $\varphi: A \rightarrow A/\mathfrak{p}$. Appelons $\varphi(a) = \bar{a}$ la classe