

5. Le théorème des zéros de Hilbert

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

d'où, dans $A[X]$:

$$(2) \quad UF + V\Psi = u \pmod{\Pi}, \quad u \notin \mathfrak{p}$$

Prenons alors, avec l'hypothèse faite sur l'anneau A , un idéal maximal \mathfrak{m} de A contenant \mathfrak{p} et ne contenant pas $ua_0 \notin \mathfrak{p}$.

On vérifie aisément que l'idéal I engendré par \mathfrak{m} et Ψ dans $A[X]$ a pour projection \mathfrak{m} dans A . En effet: $\Psi = a_0 X^d + \dots + a^d$ est tel que $a_0 \notin \mathfrak{m}$ puisque $ua_0 \notin \mathfrak{m}$. Soit alors une égalité de la forme:

$$v = L\Psi \pmod{A[X]\mathfrak{m}}, \quad v \in A.$$

En prenant les coefficients modulo \mathfrak{m} , c'est-à-dire en opérant dans le corps A/\mathfrak{m} et l'anneau $A/\mathfrak{m}[X]$, on remarque que le deuxième membre, s'il n'est pas nul, a un degré positif, tandis que le premier aurait un degré nul. On a donc $v = 0 \pmod{\mathfrak{m}}$, ou $v \in \mathfrak{m}$.

Considérons un idéal maximal M contenant I . Sa projection $M \cap A$ contient l'idéal maximal \mathfrak{m} et elle est donc égale \mathfrak{m} . Il en résulte que $ua_0 \notin M$. Par suite, M contient l'idéal premier \mathcal{P} d'après (1) et ne peut contenir le polynôme F d'après (2).

Le théorème est établi. Le résultat est dû à W. KRULL [6]. La démonstration donnée ici est inspirée de [7].

A propos de cette démonstration, on peut se poser le problème suivant:

Problème: La projection d'un idéal maximal M de $A[X]$ est-elle un idéal maximal \mathfrak{m} de A ?

La réponse n'est pas évidente pour un anneau de Jacobson quelconque.

On peut démontrer au moyen de la théorie de la dimension qu'elle est affirmative dans le cas d'un anneau de polynômes $A = k[X_1, \dots, X_n]$ à n indéterminées sur un corps k . Cet anneau est un anneau de Jacobson particulier: en effet, $k[X_1]$ étant un anneau de Jacobson, ainsi qu'on l'a remarqué au début du paragraphe 3, le théorème de transfert peut s'appliquer. On peut donc énoncer le résultat suivant:

THÉORÈME 6. *k étant un corps commutatif quelconque, l'anneau de polynômes $k[X_1, \dots, X_n]$ est un anneau de Jacobson.*

5. LE THÉORÈME DES ZÉROS DE HILBERT

Considérons un idéal premier propre \mathcal{P} de l'anneau de polynômes $k[X_1, \dots, X_n]$, k étant un corps quelconque. Soit \bar{k} la clôture algébrique de k ; nous prendrons les zéros des polynômes $f \in k[X, \dots, X_n]$ dans l'espace

affine \bar{k}^n . Un zéro de f est donc un point $M = (x, \dots, x_n)$; $x_i \in \bar{k}$, tel que $f(M) = f(x_1, \dots, x_n) = 0$. Par exemple, si $k = R$ est le corps des réels, on a $\bar{k} = C$ et les zéros des polynômes (à coefficients réels) sont pris dans l'espace affine C^n des points à coordonnées complexes.

Définition 3. On appelle *zéro de l'idéal \mathcal{P}* , algébrique sur k , un point de \bar{k}^n qui annule tous les polynômes de l'idéal \mathcal{P} .

Définition 4. On appelle *variété algébrique $V(\mathcal{P})$* de l'idéal premier \mathcal{P} l'ensemble des zéros de \mathcal{P} ; on a donc :

$$V(\mathcal{P}) = \{ M \in \bar{k}^n \mid f(M) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{P} \}.$$

Le théorème des zéros de Hilbert (Hilbertscher Nullstellensatz) s'énonce alors :

THÉORÈME 7. *\mathcal{P} étant un idéal premier propre de l'anneau $k[X_1, X_2, \dots, X_n]$, et F un polynôme n'appartenant pas à \mathcal{P} , il existe un zéro de \mathcal{P} , algébrique sur k , qui n'annule pas F .*

La démonstration se fait comme pour le théorème de transfert, avec en plus un support géométrique utile donné par la notion de variété algébrique.

Raisonnons par récurrence sur n .

Si $n = 1$, on considère l'idéal premier \mathcal{P} dans $k[X]$, et le polynôme $F \notin \mathcal{P}$. Dans le cas $\mathcal{P} = 0$, l'existence d'un zéro de \mathcal{P} algébrique que k , qui n'annule pas F , est assurée par le théorème 3. Dans le cas $\mathcal{P} \neq 0$, on a $\mathcal{P} = (\Psi)$, où Ψ est un polynôme irréductible sur k et on applique la démonstration donnée pour le théorème 3.

Supposons le théorème établi pour $n - 1$ et démontrons le pour n . En posant $A = k[X_1, \dots, X_{n-1}]$ et $X_n = X$, on étudie l'idéal premier \mathcal{P} dans $A[X]$ comme dans le théorème de transfert (§ 4). L'idéal premier \mathcal{P} a pour variété algébrique $V(\mathcal{P})$ dans l'espace affine \bar{k}^n , et l'idéal projection $\mathcal{P} \cap A = \mathfrak{p}$ a pour variété $V(\mathfrak{p})$ dans l'espace affine \bar{k}^{n-1} . L'idéal projectant Π engendré par \mathfrak{p} dans $A[X]$ a pour variété un cylindre qui contient $V(\mathcal{P})$ et $V(\mathfrak{p})$ ¹⁾.

Premier cas : $\mathcal{P} = \Pi$.

Soit :

$$F = b_0 X^m + \dots + b_m \notin \Pi, b_0 \notin \mathfrak{p}.$$

¹⁾ $V(\mathfrak{p})$ contient la projection ensembliste de $V(\mathcal{P})$ mais peut la contenir strictement. Exemple: $\mathcal{P} = (XY - 1)$ dans $k[X, Y]$ a pour variété une hyperbole qui se projette sur OX suivant l'axe $X'OX - \{0\}$, alors que $\mathfrak{p} = 0$ a pour variété $V(\mathfrak{p}) = X'OX$.

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un zéro (x_1, \dots, x_{n-1}) de \mathfrak{p} , donc de Π , algébrique sur k , qui n'annule pas b_0 .

Les racines de l'équation :

$$(3) \quad b_0(x_1, \dots, x_{n-1})X^m + \dots + b_m(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0,$$

sont en nombre fini et on peut donc choisir dans \bar{k} , qui est infini d'après le théorème 4c, un élément x_n qui n'est pas une racine de l'équation (3). Le point $M = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ sera donc un zéro algébrique sur k de \mathcal{P} qui n'annule pas F .

Deuxième cas : $\Pi \subset \mathcal{P}$.

Reprenons les relations du paragraphe 4 :

$$(1) \quad a_0^p P = B\Psi \pmod{\Pi}, \quad a_0 \notin \mathfrak{p},$$

$$(2) \quad UF + V\Psi = u \pmod{\Pi}, \quad u \in \mathfrak{p},$$

avec

$$\Psi = a_0 X^d + \dots + a_d, \quad a_0 \notin \mathfrak{p}, \quad d > 0.$$

Prenons, d'après l'hypothèse de récurrence, un zéro (x_1, \dots, x_{n-1}) de \mathfrak{p} , algébrique sur k , qui n'annule pas $ua_0 \notin \mathfrak{p}$. Choisissons pour x_n une racine de l'équation :

$$\Psi(x_1, \dots, x_{n-1}, X) = a_0(x_1, \dots, x_{n-1})X^d + \dots + a_d(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0.$$

Le point $M = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ est alors un zéro de tout polynôme $P \in \mathcal{P}$ d'après (1), et ce zéro ne peut annuler F d'après (2). Le théorème est donc établi.

Pour comprendre la signification du théorème des zéros de Hilbert en géométrie algébrique, considérons l'idéal $J(V(\mathcal{P}))$ qui est l'ensemble des polynômes de l'anneau $k[X_1, \dots, X_n]$ s'annulant en tous les points de $V(\mathcal{P})$:

$$J(V(\mathcal{P})) = \{f \in k[X_1, \dots, X_n] \mid f(M) = 0 \quad \forall M \in V(\mathcal{P})\}.$$

D'après la définition 4 de $V(\mathcal{P})$, on a évidemment :

$$J(V(\mathcal{P})) \supseteq \mathcal{P}.$$

Supposons que l'inclusion soit stricte; il existerait donc $F \in J$ et $F \notin \mathcal{P}$. Mais le théorème des zéros de Hilbert entraînerait l'existence d'un point $M \in V(\mathcal{P})$ tel que $F(M) \neq 0$, ce qui contredit la propriété $F \in J$. On a donc :

$$J(V(\mathcal{P})) = \mathcal{P}.$$

Ce résultat exprime que *tout idéal premier propre dans $k[X_1, \dots, X_n]$ est l'idéal des polynômes qui s'annulent en ses zéros algébriques sur k* ; un idéal premier est donc défini par ses zéros algébriques sur k . Un idéal maximal coïncide avec l'idéal des polynômes qui s'annulent en un point $M \in \bar{k}^n$ (ils peuvent s'annuler en d'autres points, qui sont en nombre fini, et qu'on appelle les conjugués de M sur k).

Du théorème 7 on déduit d'autres variantes pour le théorème des zéros de Hilbert, par exemple:

THÉORÈME 8. *Si un idéal I dans $A = k[X_1, \dots, X_n]$ n'a pas de zéros algébriques sur k , cet idéal est impropre: $I = A$.*

En effet, si l'idéal I était propre, il serait contenu dans un idéal maximal M , donc premier. Il existerait un polynôme $F \notin M$ et un zéro de M donc de J , qui n'annulerait pas F .

Sous une forme plus élémentaire, le théorème 8 exprime le résultat suivant: *si le système d'équations:*

$$f_i(X_1, \dots, X_n) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

avec

$$f_i \in k[X_1, \dots, X_n],$$

n'a pas de solutions dans la clôture algébrique \bar{k} , il existe des polynômes $A_i \in k[X_1, \dots, X_n]$ tels que:

$$\sum_{i=1}^p A_i f_i = 1.$$

Signalons encore la conséquence:

THÉORÈME 9. *Si un polynôme $F \in k[X_1, \dots, X_n]$ s'annule pour tous les zéros algébriques sur k d'un idéal I de $k[X_1, \dots, X_n]$, il existe un entier ρ positif tel que:*

$$f^\rho \in I.$$

(Démonstration élémentaire de RABINOVITCH, à partir du théorème 8, exposée par exemple dans [9], p. 4, ou [10], tome II, p. 102.)

6. ANNEAUX RÉGULIERS

Le problème intervenant dans la définition d'un anneau de Jacobson est celui de la représentation d'un idéal premier comme intersection des idéaux maximaux qui le contiennent. On peut exiger davantage: