

AU SUJET DES CONGRUENCES DE DEGRÉ SUPÉRIEUR A DEUX

Autor(en): **Thouvenot, S. / Chatelet, F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-41529>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

AU SUJET DES CONGRUENCES DE DEGRÉ SUPÉRIEUR A DEUX

par S. THOUVENOT et F. CHATELET

SOMMAIRE

La recherche des conditions pour qu'un polynôme d'une seule variable, à coefficients entiers rationnels, se décompose, dans le corps des restes des entiers suivant un module N premier, en produit de facteurs linéaires (ou pour qu'une congruence de degré n , suivant le module N , ait n solutions entières et distinctes), est un problème classique. La théorie des restes quadratiques en donne une solution complète pour les polynômes du second degré. Mais les solutions, qui ont été proposées jusqu'à présent pour les polynômes de degrés supérieurs à deux, ne sont pas entièrement satisfaisantes.

Dans une publication antérieure ¹⁾, l'un des auteurs avait étudié ce problème pour les polynômes du troisième degré par une méthode particulièrement élémentaire. Après avoir résumé et complété les résultats ainsi obtenus, on généralise ici cette méthode aux polynômes de degrés arbitraires.

I. CONGRUENCES DU TROISIEME DEGRÉ SANS SECOND TERME

On cherche les conditions que doivent vérifier les entiers w et t pour que la congruence:

$$\varphi_3(X) = X_3 - wX - t \equiv 0, \quad (N). \quad (1)$$

où N est un entier premier, ait trois solutions entières et distinctes. Dans une publication antérieure ²⁾, on a exploré ce problème par trois voies conduisant à des résultats qui se complètent. On résume ici ces résultats en les présentant sous une forme légèrement différente et en y apportant quelques additions.

¹⁾ Cf. S. THOUVENOT: *Comptes rendus à l'Académie des Sciences*, t. 252 (1961), pp. 1890 et 2060 et *Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air* n° 388.

²⁾ *Loc. cit.*, pp. 40 à 42, 42 à 44 et 59 à 63.

On désigne par S_j la somme des puissances, d'exposant j (entier positif), des racines du polynôme $\varphi_3(X)$. Il est classique que cette somme vérifie la relation de récurrence:

$$S_{j+3} = wS_{j+1} + tS_j, \quad (2)$$

pour tous les entiers positifs j .

Le théorème de FERMAT montre que, si la congruence (1) a trois solutions entières, les sommes S_j vérifient la relation:

$$S_{i+N-1} \equiv S_i, \quad (N), \quad (3)$$

quel que soit l'entier positif i . On peut exprimer cette relation en fonction de w et t , au moyen de la relation de récurrence (2) et montrer ensuite que les conditions obtenues pour les trois indices $i = 0, 1$ et 2 sont suffisantes pour l'existence de trois solutions entières et distinctes de la congruence (1).

Pour exprimer la relation (3) en fonction de w et t , on peut en effet poser, pour un entier positif i choisi arbitrairement:

$$S_i = u, \quad S_{i+1} = 2x, \quad S_{i+2} = 3y + uw. \quad (4)$$

La formule de récurrence (2) montre alors que, pour tout entier positif j supérieur ou égal à 2:

$$S_{i+j} = 3y K_{j-2} + 2x K_{j-1} + u K_j \quad (5)$$

où K_j est un polynôme en w et t qui se déduit des trois valeurs initiales:

$$K_0 = 1, \quad K_1 = 0, \quad K_2 = w, \quad (6)$$

par la relation de récurrence:

$$K_{v+3} = w K_{v+1} + t K_v. \quad (7)$$

On peut aussi calculer les coefficients du polynôme $K_j(w, t)$ par la formule:

$$K_j(w, t) = \sum \frac{(\lambda_2 + \lambda_3)!}{\lambda_2! \lambda_3!} w^{\lambda_2} t^{\lambda_3}, \quad (8)$$

où la somme est étendue aux partitions de l'entier j de la forme:

$$j = 2\lambda_2 + 3\lambda_3, \quad (9)$$

avec λ_2 et λ_3 entiers positifs ou nuls.

Exemples: Les partitions de l'entier 14 de la forme (9) sont:

$$14 = 2.7 = 2.4 + 3.2 = 2.1 + 3.4$$

et le polynôme $K_{14}(w, t)$ est:

$$K_{14}(w, t) = w^7 + 15 w^4 t^2 + 5 w t^4.$$

Les partitions de l'entier 15 de la forme (9) sont:

$$15 = 2.6 + 3.1 = 2.3 + 3.3 = 3.5$$

et le polynôme $K_{15}(w, t)$ est:

$$K_{15}(w, t) = 7 w^6 t + 20 w^3 t^3 + t^5.$$

En choisissant en particulier $j = N - 1$, les relations (3) et (5) montrent que:

$$S_{i+N-1} \equiv S_i \equiv 3y K_{N-3} + 2x K_{N-2} + u K_{N-1}, \quad (N), \quad (10)$$

ou encore:

$$(S_{i+2} - w S_i) K_{N-3} + S_{i+1} K_{N-2} + S_i K_{N-1} \equiv S_i, \quad (N). \quad (11)$$

Et, en utilisant les valeurs classiques des sommes des premières puissances des racines du polynôme $\varphi_3(X)$:

$$S_0 = 3, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 2w, \quad S_3 = 3t, \quad S_4 = 2w^2, \quad (12)$$

les relations (11), correspondant aux indices $i = 0, 1$ et 2 , s'écrivent:

$$\begin{aligned} -w K_{N-3} + 3 K_{N-1} &\equiv 3 \\ 3t K_{N-3} + 2w K_{N-2} &\equiv 0, \quad (N). \quad (13) \\ 3t K_{N-2} + 2w K_{N-1} &\equiv 2w \end{aligned}$$

L'ensemble de ces trois congruences forme un système linéaire, dans le corps des restes suivant le module premier N , en $K_{N-3}, K_{N-2}, K_{N-1}$, dont le déterminant est égal à $27 t^2 - 4w^3$. Si ce déterminant n'est pas divisible par N , donc si la congruence (1) n'a pas de racine double, le système (13) a pour seule solution:

$$K_{N-3} \equiv 0, \quad K_{N-2} \equiv 0, \quad K_{N-1} \equiv 1, \quad (N). \quad (14)$$

L'une quelconque de ces conditions entraîne d'ailleurs les autres, sauf peut-être si w ou t est nul — cf. (13).

D'autre part, la relation de récurrence (7) montre que, si $N - 5$ est divisible par 6, les quotients $K_{N-2}(w, t)/t$ et $K_{N-3}(w, t)/w$ sont des polynômes homogènes en w^3 et t^2 de degrés $(N - 5)/6$. Si $N - 7$ est divisible par 6, les quotients $K_{N-2}(w, t)/wt$ et $K_{N-3}(w, t)/w^2$ sont des polynômes homogènes en w^3 et t^2 de degrés $(N - 7)/6$.

L'étude directe des congruences (1) conduit à grouper celles de ces congruences pour lesquelles le rapport $\alpha = w^3/t^2$ est le même. En particulier, les congruences (1) qui ont trois solutions entières, non nulles et distinctes se répartissent en $(N - 5)/6$, ou $(N - 7)/6$ groupes de cette espèce, suivant le reste de N pour le module 6¹⁾. Il en résulte que les quotients $K_{N-3}(w, t)/w$ et $K_{N-2}(w, t)/t$, ou $K_{N-3}(w, t)/w^2$ et $K_{N-2}(w, t)/w^2$, se décomposent en produits de $(N - 5)/6$, ou de $(N - 7)/6$, facteurs de la forme:

$$w^3 - \alpha_i t^2$$

correspondants aux groupes précédents.

Ainsi, si w et t ne sont pas divisibles par N , l'une des trois congruences équivalentes:

$$K_{N-3}(w, t)/w \equiv 0, \quad K_{N-2}(w, t)/t \equiv 0, \quad K_{N-1}(w, t) \equiv 1, \quad (N)$$

si
$$N - 5 \equiv 0, \quad (6) \qquad (15)$$

ou

$$K_{N-3}(w, t)/w^2 \equiv 0, \quad K_{N-2}(w, t)/wt \equiv 0, \quad K_{N-1}(w, t) \equiv 1, \quad (N)$$

si
$$N - 7 \equiv 0, \quad (6), \qquad (15 \text{ bis})$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que la congruence (1) ait trois solutions entières, non nulles et distinctes.

Exemples : Pour l'entier premier $N = 17$, les conditions

$$K_{14}(w, t)/w = w^6 + 15 w^3 t^2 + 5 t^4 \equiv 0, \quad (17)$$

$$K_{15}(w, t)/t = 7 w^6 + 20 w^2 t^2 + t^4 \equiv 0, \quad (17)$$

sont équivalentes et leurs premiers membres se décomposent, dans le corps des restes des entiers suivant le module 17, à un facteur constant près en le produit:

$$(w^3 + 7 t^2)(w^3 + 8 t^2).$$

1) *Loc. cit.*, p. 45.

L'une ou l'autre des deux congruences :

$$w^3 + 7t^2 \equiv 0 \quad \text{ou} \quad w^3 + 8t^2 \equiv 0, \quad (17)$$

entraîne que :

$$K_{16}(w, t) = w^8 + 21w^5t^2 + 15w^2t^4 \equiv 1, \quad (17)$$

Pour l'entier premier $N = 31$, le quotient :

$$K_{28}(w, t)/w = w^{12} + 3.26w^9t^2 + 5.99w^6t^4 + 7.66w^3t^6 + 9.5t^8$$

se décompose, dans le corps des restes d'entiers suivant le module 31 en le produit :

$$(w^3 + 12t^2)(w^3 + 16t^2)(w^3 + 18t^2)(w^3 + 25t^2).$$

II. SOMMES DES PUISSANCES DES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÈBRE

Pour généraliser facilement les résultats précédents, il est commode d'utiliser les sommes S_j des puissances des racines d'une équation algébrique :

$$X^{n+1} - v_1X^n - v_2X^{n-1} - \dots - v_{n+1} = 0, \quad (16)$$

pour les exposants entiers j , tant positifs que négatifs ou nuls, et les combinaisons linéaires de ces sommes S_j .

Si on considère la puissance θ^j d'une racine θ de l'équation (16), d'exposant j entier positif, négatif ou nul, comme une fonction $f(j)$ de l'exposant j , cette fonction vérifie la relation de récurrence :

$$f(j) = \Sigma(v_i f(j-i)), \quad (17)$$

où la somme est étendue aux valeurs entières de i de 1 à $n + 1$. Toute combinaison linéaire de plusieurs solutions de la relation de récurrence (17) vérifie aussi cette relation; en particulier, les sommes S_j des puissances d'exposant j des racines de l'équation (16) vérifie la relation :

$$S_j = \Sigma(v_i S_{j-i}).$$

De façon plus précise, on peut déterminer de manière unique une solution de la relation (17) qui prend des valeurs données pour n valeurs de la variable j ; elle peut être exprimée comme combinaison linéaire de n solutions particulières de la relation (17), pourvu que ces solutions soient linéairement indépendantes.

En particulier, on peut déterminer une combinaison linéaire :

$$K_j(v_1, v_2, \dots, v_{n+1}) = a_1 \theta_1^j + a_2 \theta_2^j + \dots + a_{n+1} \theta_{n+1}^j$$

des puissances d'exposant j des racines de l'équation (16) telle que :

$$K_0 = 1, \quad K_{-1} = 0, \quad K_{-2} = 0, \quad \dots, \quad K_{-n} = 0. \quad (18)$$

La fonction K_j est déterminée de manière unique, pourvu que l'équation (16) n'ait pas de racine multiple. Inversement, les fonctions $f(j) = \theta^j$, pour chaque racine θ de l'équation (16), peuvent être exprimées comme combinaisons linéaires de $n + 1$ fonctions K_{i+j} , par exemple pour les valeurs $0, 1, \dots, n$ de l'indice i .

Les fonctions $K_j(v_1, v_2, \dots, v_{n+1})$ peuvent être calculées, à partir des valeurs initiales (18), au moyen de la formule de récurrence (17). Elles peuvent aussi, pour les valeurs positives des indices j , être exprimées en fonction de v_1, v_2, \dots, v_{n+1} par la formule :

$$K_j(v_1, v_2, \dots, v_{n+1}) = \Sigma \left(\frac{(j_1 + j_2 + \dots + j_{n+1})!}{j_1! j_2! \dots j_{n+1}!} v_1^{j_1} v_2^{j_2} \dots v_{n+1}^{j_{n+1}} \right) \quad (19)$$

où la somme est étendue à toutes les décompositions de l'entier j en sommes de la forme :

$$j = j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \dots + (n+1)j_{n+1} \quad (20)$$

avec j_1, j_2, \dots, j_{n+1} entiers positifs ou nuls.

Les sommes S_j , ou plus généralement les fonctions S_{i+j} de l'indice j , pour i fixe, peuvent être exprimées comme combinaisons linéaires des fonctions K_j par la formule :

$$S_{i+j} = u_0 K_j + u_1 K_{j-1} + \dots + u_n K_{j-n}$$

où les coefficients u_0, u_1, \dots, u_n sont déterminés par les relations :

$$\begin{aligned} S_i &= u_0, & S_{i+1} &= u_0 K_1 + u_1, & S_{i+2} &= u_0 K_2 + u_1 K_1 + u_2, \\ \dots, & & S_{i+n} &= u_0 K_n + u_1 K_{n-1} + \dots + u_n. \end{aligned}$$

Elles peuvent aussi être calculées, pour les entiers positifs j , en fonction de v_1, v_2, \dots, v_{n+1} par la formule :

$$S_j = j \Sigma \left(\frac{(j_1 + j_2 + \dots + j_{n+1} - 1)!}{j_1! j_2! \dots j_{n+1}!} v_1^{j_1} v_2^{j_2} \dots v_{n+1}^{j_{n+1}} \right) \quad (21)$$

où la somme est étendue aux décompositions de l'entier j de la forme (20) ¹⁾.

Exemples : Pour $n = 4$, les fonctions K_4, K_5 et K_6 sont :

$$K_4 = v_1^4 + 3v_1^2 v_2 + 2v_1 v_3 + v_2^2 + v_4$$

$$K_5 = v_1^5 + 4v_1^3 v_2 + 3v_1^2 v_3 + 3v_1 v_2^2 + 2v_1 v_4 + 2v_1 v_4 + 2v_2 v_3$$

$$K_6 = v_1^6 + 5v_1^4 v_2 + 4v_1^3 v_3 + 6v_1^2 v_2^2 + 3v_1^2 v_4 + 6v_1 v_2 v_3 + v_2^3 + 2v_2 v_4 + v_3^2.$$

Pour $n = 5$, la fonction K_{12} (avec $v_1 = 0$) est :

$$K_{12} = v_4^3 + 12v_2 v_3^2 v_4 + 6v_2^2 v_4^2 + 5v_2^4 v_4 + v_3^4 + v_2^6 + 10v_2^3 v_3^2 + 3v_5^2 v_2 + 6v_5 v_3 v_4 + 12v_5 v_3 v_2^2.$$

III. CONGRUENCES DE DEGRÉ ARBITRAIRE

On cherche les conditions que doivent vérifier les entiers v_1, v_2, \dots, v_{n+1} pour que la congruence :

$$X^{n+1} - v_1 X^n - v_2 X^{n-1} - \dots - v_{n+1} \equiv 0, \quad (N), \quad (22)$$

où N est un entier premier, ait $n + 1$ solutions entières et distinctes.

Le théorème de FERMAT montre que, si les racines θ de cette congruence sont entières, elles vérifient la congruence :

$$\theta^{N-1} \equiv \theta, \quad (N). \quad (23)$$

Les fonctions K_j vérifient alors, pour toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles de j , les congruences :

$$K_{j+N-1} \equiv K_j, \quad (N). \quad (24)$$

Inversement, si $n + 1$ fonctions K_{i+j} vérifient la congruence (24), les racines θ de la congruence (22), vérifient toutes la congruence de FERMAT (23) et par suite sont entières. Les fonctions K_j ont d'ailleurs été choisies de manière que les conditions les plus simples correspondent aux valeurs entières de i de $-n$ à 0 .

Ainsi, les congruences :

$$K_{N-n} \equiv 0, \quad K_{N-n-1} \equiv 0, \quad \dots, \quad K_{N-2} \equiv 0, \quad K_{N-1}, \quad (N), \quad (25)$$

¹⁾ *Loc. cit.*, p. 135, où la formule est établie seulement pour $v_1 = 0$, mais peut être généralisée facilement. Voir aussi GLENISSON et DERDVIDUE, *Mathesis* (1960).

sont des conditions nécessaires et suffisantes pour que la congruence (22) ait $n + 1$ solutions entières et distinctes.

Il est facile de constater, d'un côté que n des relations (25) entraînent la $(n + 1)^{\text{me}}$, de l'autre que l'éventualité $v_1 = 0$ apporte de notables simplifications dans ces relations ¹⁾.

Le cas de $n + 1 = 2$ présente un intérêt particulier. Dans le cas général, les relations (25) se réduisent alors à deux expressions identiques. C'est ainsi que, pour $N = 7$, ces deux relations sont:

$$4_1^4 + 4v_1^2 v_2 + 3v_2^2 \equiv 0, \quad (7).$$

D'autre part, si $v_1 \equiv 0, (N)$, la relation $K_{N-2} \equiv 0, (N)$, est toujours vérifiée, parce qu'elle contient v_1 en facteur, tandis que la relation $K_{N-1} \equiv 1, (N)$, se réduit à:

$$v_2^{(N-1)/2} \equiv 1, \quad (N).$$

Ce qui est la relation classique de GAUSS, pour les restes quadratiques suivant le module N , dont les formules (25) apparaissent ainsi comme une généralisation aux congruences d'une variable de degré quelconque.

Exemples : Pour $n = 3$ et $N = 7$, la congruence (22) a pour solutions 1, 2 et 3 si ses coefficients sont égaux à:

$$v_1 \equiv 1, \quad v_2 \equiv 3, \quad v_3 \equiv 3, \quad (7).$$

Ces coefficients vérifient les congruences:

$$K_4 \equiv 0, \quad K_5 \equiv 0, \quad K_6 \equiv 1, \quad (7).$$

Pour $n = 3$ et $N = 11$, la congruence (22) a pour solutions 1, 2 et 3 si:

$$v_1 \equiv 5, \quad v_2 \equiv 0, \quad v_3 \equiv 5, \quad (11).$$

Ces coefficients vérifient les congruences:

$$K_8 = v_1^8 + 7v_1^6 v_2 + 6v_1^5 v_3 + 15v_1^4 v_2^2 + 20v_1^3 v_2 v_3 + 10v_1^2 v_2^3 + 6v_1^2 v_3^2 + 12v_1 v_2^2 v_3 + v_2^4 + 3v_2 v_3^2 \equiv 0, \quad (11)$$

$$K_9 = v_1^9 + 8v_1^7 v_2 + 7v_1^6 v_3 + 21v_1^5 v_2^2 + 30v_1^4 v_2 v_3 + 20v_1^3 v_2^3 + 10v_1^3 v_3^2 + 30v_1^2 v_2^2 v_3 + 5v_1 v_2^4 + 12v_1 v_2 v_3^2 + 4v_2^3 v_3 + v_3^3 \equiv 0, \quad (11)$$

¹⁾ Si $n + 1 = 3$ et $v_1 = 0$, il n'y a plus dans le cas général qu'une seule relation pour en entraîner les deux autres, cf. (13) et (14).

$$\begin{aligned}
 K_{10} = & v_1^{10} + 9v_1^8 v_2 + 8v_1^7 v_3 + 28v_1^6 v_2^2 + 42v_1^5 v_2 v_3 + 35v_1^4 v_2^3 + 15v_1^4 v_3^2 \\
 & + 60v_1^3 v_2^2 v_3 + 15v_1^2 v_2^4 + 20v_1 v_2^3 v_3 + 4v_1 v_3^3 \\
 & + 30v_1^2 v_2 v_3^2 + v_2^5 + 6v_2^2 v_3^2 \equiv 1. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Pour $n = 4$ et $N = 17$, la congruence :

$$X^5 - v_2 x^3 - v_3 X^2 - v_4 X - v_5 \equiv 0, \quad (17),$$

a 5 solutions entières et distinctes dans les deux seuls cas suivants :

$$v_2 \equiv 14\lambda^2, \quad v_3 \equiv 11\lambda^3, \quad v_4 \equiv 0, \quad v_5 \equiv 2\lambda^5, \quad (17),$$

ou

$$v_2 \equiv 12\lambda^2, \quad v_3 \equiv 16\lambda^3, \quad v_4 \equiv 12\lambda^4, \quad v_5 \equiv 7\lambda^5, \quad (17),$$

où λ est un entier arbitraire. Ces systèmes de coefficients vérifient notamment la relation donnée au paragraphe II ci-dessus (exemples).

VI. REMARQUES SUR LES PARTITIONS DE L'INDICE j

Il peut être utile de contrôler le nombre total de termes dans l'expression de la fonction $K_j(v_1, v_2, \dots, v_{n+1})$, lorsqu'on la calcule par la formule (19). Ce nombre est égal au nombre de partitions de l'indice j de la forme (20).

On peut pour cela construire un tableau triangulaire T, défini de la façon suivante :

On fait correspondre à la colonne de rang i le coefficient v_i de l'équation (16) d'indice i . A la ligne de rang j , on fait correspondre l'indice j de la fonction K_j considérée.

A l'intersection de la ligne de rang j et de la colonne de rang i , on porte le nombre de termes de l'expression de K_j ayant v_i comme facteur d'indice maximum.

Le nombre de termes de la fonction K_j , d'indice j , correspondant à une équation (16) de degré $n + 1$, est alors la somme des $n + 1$ premiers termes de la ligne de rang j .

On peut construire le tableau T par récurrence, ligne par ligne : l'élément appartenant à la ligne de rang j et à la colonne de rang i est égal à la somme des i premiers termes de la ligne de rang $j - i$.

TABLEAU T

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	1								
3	1	1	1							
4	1	2	1	1						
5	1	2	2	1	1					
6	1	3	3	2	1	1				
7	1	3	4	3	2	1	1			
8	1	4	5	5	3	2	1	1		
9	1	4	7	6	5	3	2	1	1	
10	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1

(Reçu le 15 mars 1967)

S. Thouvenot
17, rue Raynouard
Paris (16)

Prof. F. Châtelet
11, rue Jules Haag
Besançon