Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1967)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÜBER EINE KLASSE VON FUNKTIONALGLEICHUNGEN IM HILBERT-RAUM

Autor: Daróczy, Z.

Kapitel: §. 2

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41530

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

§. 2

Es gilt das folgende

LEMMA 1. *Genügt das Funktional* $\varphi(x)$ *der Gleichung* (1), *so genügt das Funktional* $\psi(x) \equiv \varphi(x) - \varphi(0)$ *der Funktionalgleichung*

$$\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y) \qquad (x, y \in H). \tag{3}$$

Beweis. Wir machen die folgenden Substitutionen in der Gleichung (1):

$$x = A^{-1}(u), \quad y = B^{-1}(v-c); \quad x = A^{-1}(u), \quad y = B^{-1}(-c);$$
$$x = 0, \quad y = B^{-1}(v-c); \quad x = 0, \quad y = B^{-1}(-c).$$

Dann erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$\varphi(u+v) = \alpha\varphi[A^{-1}(u)] + \beta\varphi[B^{-1}(v-c)] + \gamma, \tag{4}$$

$$\varphi(u) = \alpha\varphi[A^{-1}(u)] + \beta\varphi[B^{-1}(-c)] + \gamma, \tag{5}$$

$$\varphi(v) = \alpha\varphi(0) + \beta\varphi[B^{-1}(v-c)] + \gamma, \tag{6}$$

$$\varphi(0) = a\varphi(0) + \beta\varphi[B^{-1}(-c)] + \gamma. \tag{7}$$

Aus (4), (5), (6) und (7) folgt unmittelbar

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v) - \varphi(0),$$

d.h. das Funktional $\psi(x) \equiv \varphi(x) - \varphi(0)$ genügt der Gleichung (3).

Bemerkung: Für die Funktionalgleichung (2) wurde dieses Lemma erstmals in [3] bewiesen. Die hier beschriebene Beweisidee stammt von L. LOSONCZI (Siehe [5]).

LEMMA 2. *Befriedigt das Funktional* $\varphi(x)$ *die Gleichung* (1), *so gelten für das Funktional* $\psi(x) \equiv \varphi(x) - \varphi(0)$ *die Relationen*

$$\psi[A(x)] = \alpha\psi(x), \quad \psi[B(x)] = \beta\psi(x) \qquad (x \in H). \tag{8}$$

Beweis. Setzen wir in (1) $y = B^{-1}(-c)$, so erhalten wir die Gleichung

$$\varphi[A(x)] = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi[B^{-1}(-c)] + \gamma. \tag{9}$$

Mit der Berücksichtigung von (7) und (9) gewinnen wir

$$\psi[A(x)] = \varphi[A(x)] - \varphi(0) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi[B^{-1}(-c)] + \gamma - \varphi(0)$$
$$= \alpha\varphi(x) + \varphi(0) - \alpha\varphi(0) - \varphi(0) = \alpha[\varphi(x) - \varphi(0)] = \alpha\psi(x).$$

Damit ist unseres Lemma bereits bewiesen, da der Beweis für B und β analog verläuft.

§. 3

Es sei $\lambda \neq 0$ eine reelle Zahl und A ein Operator aus $[H \to H]$. Wir führen die folgenden Bezeichnung ein: $E_\lambda(A) = \{ x \mid x \in H, A(x) - \lambda x = 0\}$. Mit anderen Worten: $E_\lambda(A)$ ist der zu λ gehörige Eigenraum von A. Den adjungierten Operator von A bezeichnen wir mit A^*. Wir können jetzt den folgenden Satz beweisen:

SATZ. *Die Funktionalgleichung* (1) *hat dann und nur dann eine stetige nichtkonstante Lösung, wenn ein* $x_0 \neq 0$ *in* $E = E_\alpha(A^*) \cap E_\beta(B^*)$ *und eine Zahl* δ *in* R *existiert, so dass die Gleichung*

$$(c, x_0) = (\alpha + \beta - 1)\,\delta + \gamma \tag{10}$$

gilt.

In diesem Falle ist die allgemeine stetige und nichtkonstante Lösung der Gleichung (1)

$$\varphi(x) = (x, x_0) + \delta\,, \tag{11}$$

wobei $x_0 \neq 0$ *aus* E *und* δ *aus* R *mit der Eigenschaft* (10) *beliebig wählbar ist.*

Beweis. 1) Es sei φ eine stetige nichtkonstante Lösung von (1). Dann ist $\psi(x) \equiv \varphi(x) - \varphi(0)$ auch stetig und nichtkonstant und nach Lemma 1 genügt es der Gleichung (3). Aus dem Satz von RIESZ folgt dann die Darstellung

$$\psi(x) = (x, x_0) \qquad (x \in H)\,, \tag{12}$$

wobei x_0 ein von Null verschiedenes Element von H ist (Siehe [6]). Aus (8) folgen die Gleichungen

$$(A(x), x_0) = \alpha(x, x_0)$$

und

$$(B(x), x_0) = \beta(x, x_0)\,,$$

also ist $x_0 \neq 0$ ein Element aus $E_\alpha(A^*) \cap E_\beta(B^*)$. Aus (1) und (12) ergibt sich (mit der Substitution $x = y = 0$ und $\delta = \varphi(0)$)

$$(c, x_0) = \psi(c) = \varphi(c) - \delta = \alpha\delta + \beta\delta + \gamma - \delta = (\alpha + \beta - 1)\,\delta + \gamma\,,$$

also gilt (10). Dabei haben wir gezeigt, dass φ die Gestalt $\varphi(x) = \psi(x) + \varphi(0) = (x, x_0) + \delta$ hat.