

## §. 2

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

§. 2

Es gilt das folgende

LEMMA 1. *Genügt das Funktional  $\varphi(x)$  der Gleichung (1), so genügt das Funktional  $\psi(x) \equiv \varphi(x) - \varphi(0)$  der Funktionalgleichung*

$$\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y) \quad (x, y \in H). \quad (3)$$

*Beweis.* Wir machen die folgenden Substitutionen in der Gleichung (1):

$$\begin{aligned} x = A^{-1}(u), \quad y = B^{-1}(v-c); \quad x = A^{-1}(u), \quad y = B^{-1}(-c); \\ x = 0, \quad y = B^{-1}(v-c); \quad x = 0, \quad y = B^{-1}(-c). \end{aligned}$$

Dann erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$\varphi(u+v) = \alpha\varphi[A^{-1}(u)] + \beta\varphi[B^{-1}(v-c)] + \gamma, \quad (4)$$

$$\varphi(u) = \alpha\varphi[A^{-1}(u)] + \beta\varphi[B^{-1}(-c)] + \gamma, \quad (5)$$

$$\varphi(v) = \alpha\varphi(0) + \beta\varphi[B^{-1}(v-c)] + \gamma, \quad (6)$$

$$\varphi(0) = \alpha\varphi(0) + \beta\varphi[B^{-1}(-c)] + \gamma. \quad (7)$$

Aus (4), (5), (6) und (7) folgt unmittelbar

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v) - \varphi(0),$$

d.h. das Funktional  $\psi(x) \equiv \varphi(x) - \varphi(0)$  genügt der Gleichung (3).

*Bemerkung:* Für die Funktionalgleichung (2) wurde dieses Lemma erstmals in [3] bewiesen. Die hier beschriebene Beweisidee stammt von L. LOSONCZI (Siehe [5]).

LEMMA 2. *Befriedigt das Funktional  $\varphi(x)$  die Gleichung (1), so gelten für das Funktional  $\psi(x) \equiv \varphi(x) - \varphi(0)$  die Relationen*

$$\psi[A(x)] = \alpha\psi(x), \quad \psi[B(x)] = \beta\psi(x) \quad (x \in H). \quad (8)$$

*Beweis.* Setzen wir in (1)  $y = B^{-1}(-c)$ , so erhalten wir die Gleichung

$$\varphi[A(x)] = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi[B^{-1}(-c)] + \gamma. \quad (9)$$

Mit der Berücksichtigung von (7) und (9) gewinnen wir

$$\begin{aligned} \psi[A(x)] &= \varphi[A(x)] - \varphi(0) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi[B^{-1}(-c)] + \gamma - \varphi(0) \\ &= \alpha\varphi(x) + \varphi(0) - \alpha\varphi(0) - \varphi(0) = \alpha[\varphi(x) - \varphi(0)] = \alpha\psi(x). \end{aligned}$$

Damit ist unseres Lemma bereits bewiesen, da der Beweis für  $B$  und  $\beta$  analog verläuft.

§. 3

Es sei  $\lambda \neq 0$  eine reelle Zahl und  $A$  ein Operator aus  $[H \rightarrow H]$ . Wir führen die folgenden Bezeichnung ein:  $E_\lambda(A) = \{x \mid x \in H, A(x) - \lambda x = 0\}$ . Mit anderen Worten:  $E_\lambda(A)$  ist der zu  $\lambda$  gehörige Eigenraum von  $A$ . Den adjungierten Operator von  $A$  bezeichnen wir mit  $A^*$ . Wir können jetzt den folgenden Satz beweisen:

**SATZ.** Die Funktionalgleichung (1) hat dann und nur dann eine stetige nichtkonstante Lösung, wenn ein  $x_0 \neq 0$  in  $E = E_\alpha(A^*) \cap E_\beta(B^*)$  und eine Zahl  $\delta$  in  $R$  existiert, so dass die Gleichung

$$(c, x_0) = (\alpha + \beta - 1) \delta + \gamma \quad (10)$$

gilt.

In diesem Falle ist die allgemeine stetige und nichtkonstante Lösung der Gleichung (1)

$$\varphi(x) = (x, x_0) + \delta, \quad (11)$$

wobei  $x_0 \neq 0$  aus  $E$  und  $\delta$  aus  $R$  mit der Eigenschaft (10) beliebig wählbar ist.

*Beweis.* 1) Es sei  $\varphi$  eine stetige nichtkonstante Lösung von (1). Dann ist  $\psi(x) \equiv \varphi(x) - \varphi(0)$  auch stetig und nichtkonstant und nach Lemma 1 genügt es der Gleichung (3). Aus dem Satz von RIESZ folgt dann die Darstellung

$$\psi(x) = (x, x_0) \quad (x \in H), \quad (12)$$

wobei  $x_0$  ein von Null verschiedenes Element von  $H$  ist (Siehe [6]). Aus (8) folgen die Gleichungen

$$(A(x), x_0) = \alpha(x, x_0)$$

und

$$(B(x), x_0) = \beta(x, x_0),$$

also ist  $x_0 \neq 0$  ein Element aus  $E_\alpha(A^*) \cap E_\beta(B^*)$ . Aus (1) und (12) ergibt sich (mit der Substitution  $x = y = 0$  und  $\delta = \varphi(0)$ )

$$(c, x_0) = \psi(c) = \varphi(c) - \delta = \alpha\delta + \beta\delta + \gamma - \delta = (\alpha + \beta - 1) \delta + \gamma,$$

also gilt (10). Dabei haben wir gezeigt, dass  $\varphi$  die Gestalt  $\varphi(x) = \psi(x) + \varphi(0) = (x, x_0) + \delta$  hat.